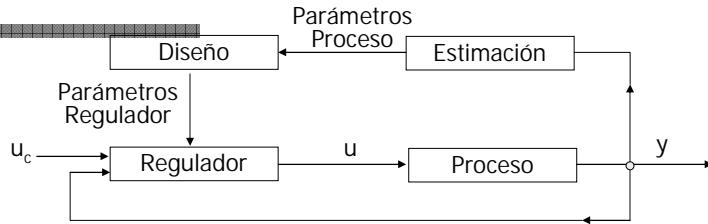


## Reguladores Autoajustables



$$(1) \quad \begin{aligned} A(q)y(t) &= B(q)u(t) + C(q)e(t) \\ qy(t) &= y(t+1) \quad q^{-1}y(t) = y(t-1) \end{aligned}$$

ARMAX  
Auto Regressive  
Moving Average  
eXogenous

e(t): ruido blanco Gaussiano

$$A(q) = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + 1$$

$$B(q) = b_m + b_{m-1} q^{m-1} + \dots + b_1 q + b_0$$

$$C(q) = c_n q^n + c_{n-1} q^{n-1} + \dots + c_1 q + c_0$$

$$gr(A) = gr(C) = n, \quad gr(B) = m$$

$$gr(A) - gr(B) = n - m = d_0$$

e(t): ruido blanco Gaussiano

$$\text{Definimos } A^*(z) = z^n A(z^{-1})$$

$$(2) \quad A^*(q^{-1})y(t) = B^*(q^{-1})u(t-d_0) + C^*(q^{-1})e(t)$$

$$A^*(q^{-1})y(t) = q^{-d_0} B^*(q^{-1})u(t) + C^*(q^{-1})e(t)$$

$$A^*(q^{-1}) = a_n + a_{n-1}q^{-1} + \dots + a_1q^{-(n-1)} + q^{-n}$$

$$B^*(q^{-1}) = b_m q^{-d_0} + b_{m-1} q^{-d_0-1} + \dots + b_1 q^{-(n-1)} + b_0 q^{-n}$$

$$C^*(q^{-1}) = c_n + c_{n-1}q^{-1} + \dots + c_1q^{-(n-1)} + c_0q^{-n}$$

### Caso Determinístico ( $e(t) \equiv 0$ ) (STR Indirecto)

Mínimos cuadrados (LS):

$$\theta = [b_o b_1, \dots, b_m a_1, \dots, a_n]^T \in \Re^{(n+m+1)}$$

$$\varphi(t) = [u(t-d_0), \dots, u(t-d_0-m), -y(t-1), \dots, y(t-n)]^T \in \Re^{(n+m+1)}$$

$$y(t) = \theta^T \varphi(t)$$

Algoritmos mínimos cuadrados Recursivo (RLS):

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)\varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1)$$

$$K(t) = P(t-1)\varphi(t-1)\left(\lambda + \varphi^T(t-1)P(t-1)\varphi(t-1)\right)^{-1}$$

$$P(t) = (I - K(t)\varphi^T(t-1))P(t-1)/\lambda$$

### Localización de Polos (No adaptable)

$$A_m(q)y_m(t) = B_m(q)u_c(t) \quad (\text{Lazo cerrado deseado})$$

$$\text{controlador } R(q)u(t) = T(q)u_c(t) - S(q)y(t)$$

$$\underline{\underline{AR_1}} + \underline{\underline{B^-S}} = A_0 A_m \quad R_1, S, \text{ soluciones de la ec. de Diophantes}$$

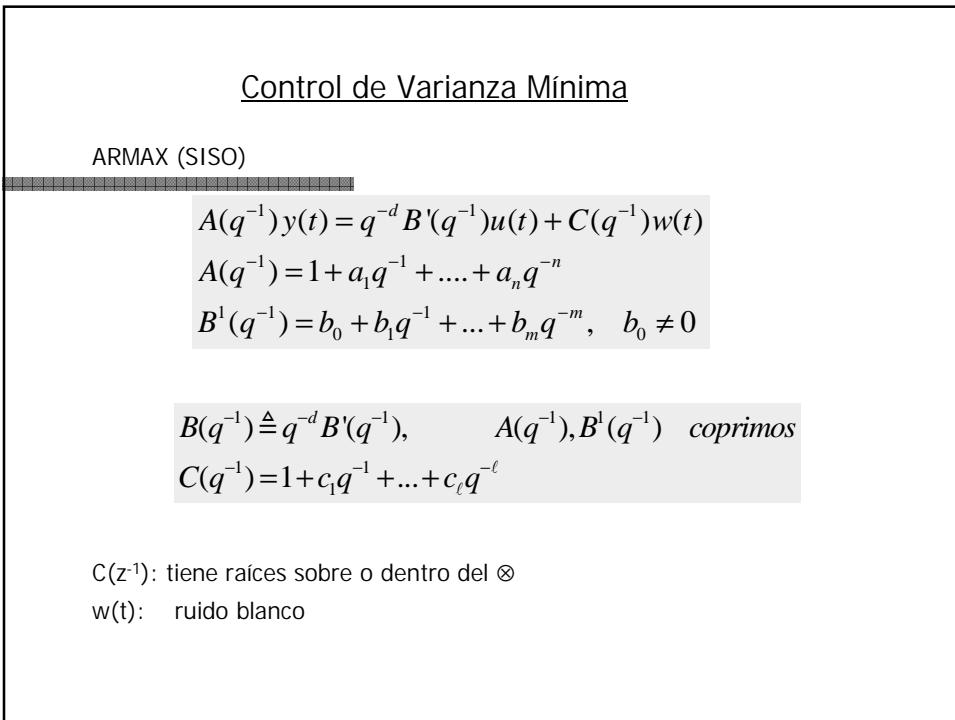
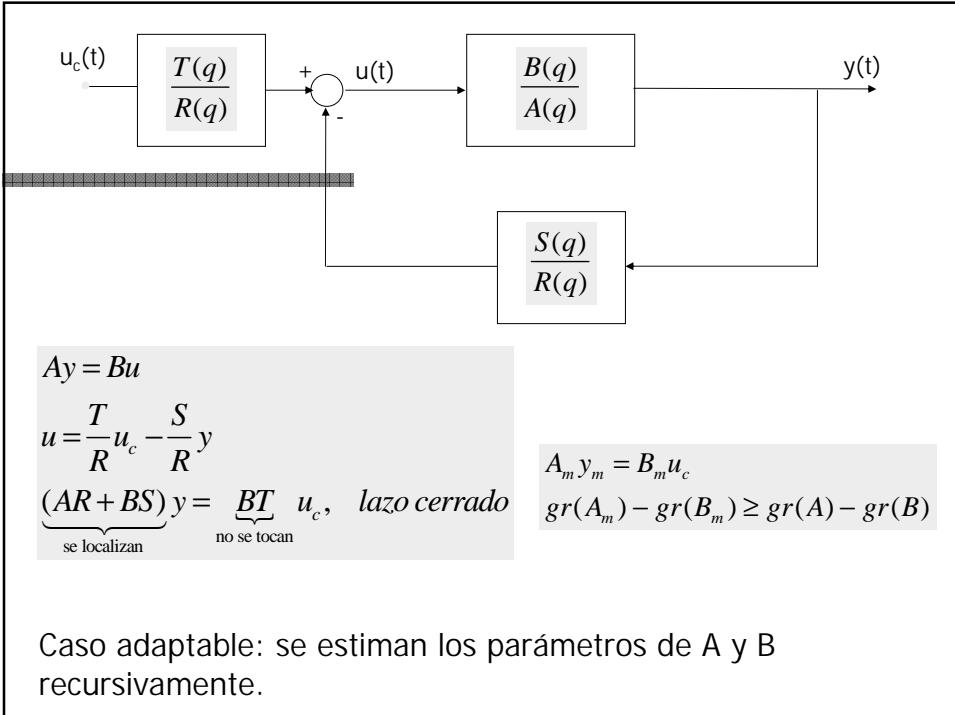
$$B = B^+ B^-, \quad B^+ : \text{polinomio mómico raíces estables}$$

$$R = B^+ R_1$$

$A_0$ : polinomio mónico Hurwitz arbitrario

$$T = \frac{A_0 B_m}{B^-} \quad B^- \text{ divide } a \quad B_m$$

$$T = A_0 B_m'$$



$$E\left\{ w(t) \Big|_{F_{t-1}} \right\} = 0, \quad E\left\{ w^2(t) \Big|_{F_{t-1}} \right\} = \sigma^2$$

$\mathbb{F}_{t-1}$ : información hasta el  $t-1$   $(u(t), y(t)) \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t - 1$

Sea  $y^*(t)$  la secuencia deseada para la salida

$$\text{Sea } J(t+d) \triangleq E\left\{ [y(t+d) - y^*(t+d)]^2 \right\}$$

Encontrar  $u(t)$ , como función de  $y(t), y(t-1), \dots, u(t-1), u(t-1), \dots$   
t.q.  $J(t+d)$  es minimizada

Solución:

El control de varianza mínima está dado por:

$$\beta_0 u(t) = q[\beta_0 - \beta(q^{-1})]u(t-1) + y^*(t+d) + [C(q^{-1}) - 1]y^0(t+d|t) - \alpha(q^{-1})y(t)$$

obien

$$\phi^T(t)\theta = y^*(t+d)$$

con

$$\phi(t) = [y(t), \dots, y(t-n+1), u(t), \dots, u(t-m-d+1), -y^0(t+d-1|t-1), \dots, -y^0(t+d-\ell|t-1)]^T$$

$$\theta = [\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \dots, \beta_{m+d}, c_1, \dots, c_e]^T$$

el cual garantiza que

$$y^0(t+d|t) = y^*((t+d)$$

$$y^0(t+d|t) = E\left\{y(t+d)\Big|_{F_t}\right\}$$

predicción óptima de  $y(t)$  "d" pasos hacia delante, que satisface:

$$\begin{aligned} C(q^{-1})y^0(t+d|t) &= \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \\ \text{con } \alpha(q^{-1}) &= G(q^{-1}) \\ \beta(q^{-1}) &= F(q^{-1})B'(q^{-1}) \end{aligned}$$

Siendo  $G(q^{-1})$  y  $F(q^{-1})$  los únicos polinomios que satisfacen

$$C(q^{-1}) = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})$$

$$\begin{aligned} \text{con } F(q^{-1}) &= f_0 + f_1q^{-1} + \dots + f_{d-1}q^{-(d-1)}, f_0 = 1 \\ G(q^{-1}) &= g_0 + g_1q^{-1} + \dots + g_{n-1}q^{-(n-1)} \end{aligned}$$

### Propiedades

a)  $y^0(t+d|t) = y^*(t+d)$

b) Si  $\phi^T(t)\theta_0 = y^*(t+d)$  es válida  $\forall t$

el control de varianza mínima se puede escribir como:

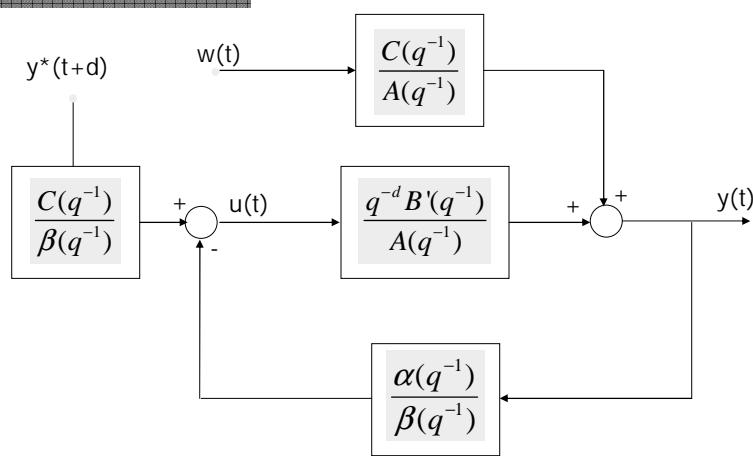
$$\beta(q^{-1})u(t) + \alpha(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})y^*(t+d)$$

c) La ley de control anterior da un sistema de lazo cerrado que satisface

$$\begin{aligned} B'(q^{-1})u(t) &= A(q^{-1})y^*(t+d) - G(q^{-1})w(t) \\ y(t+d) &= y^*(t+d) + \tilde{y}(t+d) \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{y}(t+d) = y(t+d) - y^0(t+d|t) = F(q^{-1})w(t+d)$$



### Control Lineal Cuadrático Gaussiano (LQG)

Sea

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) & x, w \in \Re^n \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) & y, v \in \Re^P \\ x(t_0) &= x_0 & u \in \Re^m \end{aligned}$$

$w(t), v(t)$  : ruidos blanco Gaussianos

$x(t_0)$  : Gaussiano  $(\bar{x}_0, P_0)$

$$\begin{aligned} E\{x(t_0)\} &= \bar{x}_0 & E\{(x(t_0) - \bar{x}_0)(x(t_0) - \bar{x}_0)^T\} &= P_0 \\ E\{w(t)\} &= 0 & E\{v(t)\} &= 0 \end{aligned}$$

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(t) & v^T(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & O \\ O & R \end{bmatrix} \delta(t-s), \quad \delta(t-s) = \begin{cases} 1 & t=s \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

Encontrar  $u(t)$  para  $F_{t-1} = \{(u(t), y(t)) | t = t_0, t_0 + 1, \dots, t-1\}$   $t.q$

$$J_N E \left\{ x^T(N) \Omega_N x(N) + \sum_{t=0}^{N-1} \left[ x^T(t) \Omega x(t) + u^T(t) \Gamma u(t) \right] \right\}$$

Sea minimizada

Solución:

El control que minimiza  $J_N$  está dado por  $u(t) = L(t) \hat{x}(t)$

$$\text{con } \hat{x}(t) = E \left\{ x(t) \Big| F_{t-1} \right\} \quad \text{estimación óptima FK}$$

La estimación satisface

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)[y(t) - c\hat{x}(t)], \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$$

$K(t)$ : Ganancia de Kalman

$$\begin{aligned} K(t) &= A\Sigma(t)C^T [C\Sigma(t)C^T + R]^{-1} \\ \Sigma(t+1) &= A\Sigma(t)A^T + Q - K(t)[C\Sigma(t)C^T + R]K^T(t), \quad \Sigma(t_0) = P_0 \end{aligned}$$

Riccati

$$\Sigma(t) = E \left\{ [\hat{x}(t) - x(t)][(\hat{x}(t) - x(t))^T] \right\}$$

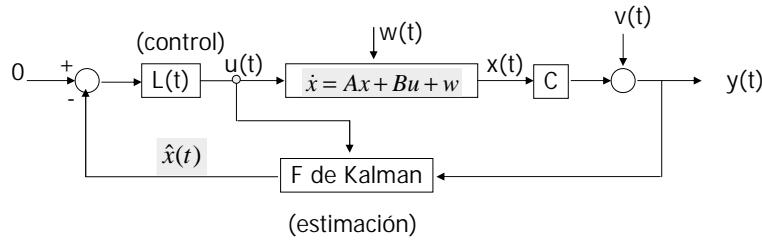
$$L(t) = \left[ \Gamma + B^T S(t+1) B \right]^{-1} B^T S(t+1) A$$

$$S(t) = \Omega + L^T(t) \Gamma (L(t) + [A - BL(t)]^T S(t+1) [A - BL(t)]), \quad S(N) = \Omega_N$$

Riccati

Principio de separación:

-Filtro de Kalman (estimación)  $\hat{x}(t)$   
 -LQ Control (control)  $L(t)$



### Control por Referencia a Modelo Estocástico

La salida deseada  $y^*(t)$  queda especificada por

$$E(q^{-1})y^*(t) = q^{-d}gH(q^{-1})r(t)$$

$$\begin{aligned} E(q^{-1}) &= 1 + e_1q^{-1} + \dots + e_\ell q^{-\ell} \\ H(q^{-1}) &= 1 + h_1q^{-1} + \dots + h_\ell q^{-\ell} \\ E(q^{-1}): \text{estable}, \quad g &= \text{cte} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{R(t)}} \boxed{\frac{q^{-1}gH(q^{-1})}{E(q^{-1})}} \rightarrow Y^*(t)$$

Se puede demostrar que si C es a.e. la predicción óptima "d" pasos adelante  $y_F^o(t+d)$  de la señal  $y_F(t+d) \triangleq E(q^{-1})y(t+d)$

satisface

$$C(q^{-1})y_F^o(t+d|_t) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t)$$

donde  $y_F^o(t+d|_t) = E\{y_F(t+d)|_{F_t}\}$

$$\text{con } \alpha(q^{-1}) = G(q^{-1})$$

$$\beta(q^{-1}) = F(q^{-1})\beta^1(q^{-1})$$

donde  $G(q^{-1})yF(q^{-1})$  son las únicas soluciones de

$$C(q^{-1})E(q^{-1}) = F(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}G(q^{-1})$$

$$\text{con } F(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{d-1}q^{-(d-1)}$$

$$G(q^{-1}) = g_0 + g_1q^{-1} + \dots + g_{n-1}q^{-(n-1)}$$

Para el sistema definido por

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B^1(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})w(t)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$$

$$B^1(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}, \quad b_0 \neq 0$$

$$B(q^{-1}) = q^{-d}B^1(q^{-1}) \quad A(q^{-1}), B^1(q^{-1}) \text{ coprimos}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_\ell q^{-\ell} \quad (\text{a.e.})$$

$w(t)$ : ruido blanco, media cero, varianza  $\sigma^2$ .

El control fue minimiza la función criterio

$$J(t + d) = E \left\{ E^{(q^{-1})} \left[ y(t + d) - y^*(t + d) \right]^2 \right\}$$

Satisface:

$$\begin{aligned} \beta_0 u(t) &= q \left[ \beta_0 - \beta(q^{-1}) \right] u(t-1) + g H(q^{-1}) r(t) + \\ &\quad + \left[ C(q^{-1}) - 1 \right] y_F^0(t + d /_t) - \alpha(q^{-1}) y(t) \end{aligned}$$

Propiedades:

- a) El efecto de la Ley anterior produce

$$y_F^0(t + d /_t) = g H(q^{-1}) r(t) = E(q^{-1}) y^*(t + d)$$

- b) Si la Ley de Control es válida  $\forall t$  entonces

$$\beta(q^{-1}) u(t) + \alpha(q^{-1}) y(t) = C(q^{-1}) E(q^{-1}) y^*(t + d)$$

- c) La Ley de Control entrega un sistema de lazo cerrado

$$\begin{aligned} B'(q^{-1}) E(q^{-1}) u(t) &= g A(q^{-1}) H(q^{-1}) r(t) - G(q^{-1}) w(t) \\ E(q^{-1}) y(t + d) &= g H(q^{-1}) r(t) + F(q^{-1}) w(t + d) \end{aligned}$$

- d) El Controlador entrega mínima varianza de  $y_F(t + d)$  alrededor de

$$y_F^*(t + d) \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} y_F(t + d) &= E(q^{-1}) y(t + d) \\ y_F^*(t + d) &= E(q^{-1}) y^*(t + d) \end{aligned}$$

e)  $\{y(t)\}, \{u(t)\}$  son acotados (en el sentido de media cuadrática) s w(t)

lo es y  $B^1(q^{-1}) y E(q^{-1})$  son a.e

