EM725

Control Adaptivo de Sistemas

Prof. Manuel A. Duarte Mermoud

Semestre Otoño 2006

9.0 Control Adaptivo Robusto en Sistemas de tiempo Continuo

1er. Modelo de Error

Vector de error de parámetros

$$e(t) = \phi^T(t)\omega(t) \qquad e(t) \in \Re, \quad \phi(t), \omega(t) \in \Re^n$$

Error de salida

Vector de regresión (observación)

$$\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$$

Ley de ajuste de parámetros

$$\dot{\phi}(t) = \dot{\theta}(t) = -e(t)\omega(t)$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\phi^T\phi \\ \dot{V} &= -e^2 \leq 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \phi &\in L^\infty \\ e &\in L^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&Si \quad \omega \in L^{\infty} \Rightarrow e \in L^{\infty} \\
&Si \quad \dot{\omega} \in L^{\infty} \Rightarrow \dot{e} \in L^{\infty} \\
&Como \quad e \in L^{2} \wedge \dot{e} \in L^{\infty} \Rightarrow e \to 0, t \to \infty \\
&Si \quad \omega \in \Omega_{(n,t_{0},T_{0})} \Rightarrow \phi \to 0, t \to \infty
\end{aligned}
$$

2do. Modelo de error

Vector de error de parámetros

$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi^T(t)\omega(t) \qquad e(t) \in \Re, \quad \phi(t), \omega(t) \in \Re^n$$

Error de salida

> 0

Vector de regresión (observación)

$$\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$$

Ley de ajuste de parámetros

$$\dot{\phi}(t) = \dot{\theta}(t) = -e(t)\omega(t)$$

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(e^2 + \phi^T \phi) \\ \dot{V} &= -a_m e^2 \le 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} e, \phi \in L^{\infty} \\ e \in L^{2} \end{array}$$

$$Si \quad \omega \in L^{\infty} \Rightarrow \dot{e} \in L^{\infty} \Rightarrow e \to 0, t \to \infty$$
$$Si \quad \omega \in \Omega_{(n,t_0,T_0)} \Rightarrow \phi \to 0, t \to \infty$$

Control Adaptivo Planta de Primer Orden b_p conocido (Caso Ideal)

$$\dot{y}_p(t) + a_p y_p(t) = b_p u(t)$$
$$\dot{y}_m(t) + a_m y_m(t) = b_m r(t), \qquad a_m > 0 \quad , \quad b_p = 1$$
$$u(t) = \theta(t) y_p(t) + b_m r(t)$$
$$\dot{y}_p(t) + (a_p - \theta(t)) y_p(t) = b_m r(t)$$
$$a_p - \theta^* = a_m$$
$$e(t) = y_p(t) - y_m(t)$$
$$\dot{e}(t) + (a_m + \theta^* - \theta(t)) y_p(t) - a_m y_m(t) = 0$$
$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = \left(\theta(t) - \theta^*\right) y_p(t)$$

$$\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$$
$$\omega(t) = y_p(t)$$
$$(*) \quad \dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi(t)\omega(t)$$

Ley de Ajuste

$$(*) \quad \dot{\phi}(t) = -e(t)\omega(t)$$

- Planta puede ser inestable

- $\omega(\cdot) \in L^\infty \quad debe\ probarse$
- $a_m > 0$

Control Adaptivo Planta de Primer Orden b_p conocido (Perturbación Externa)

$$\dot{y}_p(t) + a_p y_p(t) = b_p(u(t) + \underbrace{\upsilon(t)}_{\text{acotada}}\frac{1}{b_p})$$

$$\dot{y}_m(t) + a_m y_m(t) = b_m r(t), \qquad a_m > 0 \quad , \quad b_p = 1$$

$$u(t) = \theta(t) y_p(t) + b_m r(t)$$

$$\dot{y}_p(t) + (a_p - \theta(t)) y_p(t) = b_m r(t) + \upsilon(t)$$

$$a_p - \theta^* = a_m$$

$$e(t) = y_p(t) - y_m(t)$$

$$\dot{e}(t) + (a_m + \theta^* - \theta(t)) y_p(t) - a_m y_m(t) = \upsilon(t)$$

$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = \left(\theta(t) - \theta^*\right) y_p(t) + \upsilon(t)$$

$$\phi(t) = \theta(t) - \theta^*$$

$$\omega(t) = y_p(t)$$

$$(*) \quad \dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi(t)\omega(t) + \upsilon(t)$$

Ley de Ajuste ?

$$(*) \quad \dot{\phi}(t) = -e(t)\omega(t)$$

Identificación Planta de Primer Orden
(Caso Ideal)

$$\dot{y}_p(t) + a_p y_p(t) = b_p u(t)$$

$$\dot{y}_p(t) + \hat{a}_p(t) y_p(t) = \hat{b}_p(t) u(t) - a_m e(t)$$

$$e(t) = \hat{y}_p(t) - y_p(t)$$

$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = -\left(\hat{a}_p(t) - a_p\right) y_p(t) + \\ + \left(\hat{b}_p(t) - b_p\right) u(t)$$

$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi_1(t) y_p + \phi_2(t) u(t)$$

$$\phi(t) = \left[\phi_1(t)\phi_2(t)\right]^T \in \Re^2$$

$$\omega(t) = \left[-y(t)\; u(t)\right]^T \in \Re^2$$

$$(*) \quad \dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi^T(t)\omega(t)$$

Ley de Ajuste

$$(*) \quad \dot{\phi}(t) = -e(t)\omega(t)$$

- Planta asintóticamente estable
- $u(\cdot) \in L^\infty$
- $a_m > 0$

Identificación Planta de Primer Orden
(Perturbación Externa)

$$\dot{y}_p(t) + a_p y_p(t) = b_p\left(u(t) + \upsilon(t)\frac{1}{b_p}\right)$$

acotada

$$\dot{y}_p(t) + \hat{a}_p(t) y_p(t) = \hat{b}_p(t) u(t) - a_m e(t)$$

$$e(t) = \hat{y}_p(t) - y_p(t)$$

$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = -\left(\hat{a}_p(t) - a_p\right) y_p(t) +$$

$$+\left(\hat{b}_p(t) - b_p\right) u(t) + \upsilon(t)$$

$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi_1(t) y_p + \phi_2(t) u(t) + \upsilon(t)$$

$$\phi(t) = [\phi_1(t)\phi_2(t)]^T \in \Re^2$$

$$\omega(t) = [-y(t)\; u(t)]^T \in \Re^2$$

$$(*) \quad \dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi^T(t)\omega(t) + \upsilon(t)$$

Ley de Ajuste ?

$$(*) \quad \dot{\phi}(t) = -e(t)\omega(t)$$

Control Adaptivo de Plantas de Primer Orden (b_p=1)
(Parámetros Variables en el Tiempo)

$$\dot{y}_p(t) + a_p(t)y_p(t) = u(t)$$

$$\dot{y}_m(t) + a_m y_m(t) = b_m r(t)$$

$$u(t) = \theta(t)y_p(t) + b_m r(t)$$

$$\dot{y}_p(t) + (a_p(t) - \theta(t))y_p(t) = b_m r(t)$$

$$a_p(t) - \theta^*(t) = a_m \Rightarrow \theta^*(t) = a_p(t) - a_m$$

$$e(t) = y_p(t) - y_m(t)$$

$$\dot{e}(t)+(a_m+\theta^*(t)-\theta(t))y_p(t)-a_m y_m(t)=0$$

$$(*)\quad \dot{e}(t)+a_m e(t)=\phi(t)y_p(t)$$

$$\dot{\phi}(t)=-e(t)y_p(t)=\dot{\theta}(t)-\dot{\theta}^*(t)$$

$$\dot{\phi}(t)=-e(t)y_p(t)\underbrace{-\dot{\theta}^*(t)}_{\upsilon(t)}\qquad \left(\dot{\theta}(t)=-e(t)y_p(t)\right)$$

$$(*)\quad \dot{\phi}(t)=-e(t)y_p(t)+\upsilon(t)$$

acotada

$$\left(\dot{\theta}^*(t)=\dot{a}_p(t)\right)$$

Identificación Planta de primer Orden (b_p=1)
(Parámetros Variables en el tiempo)

$$\dot{y}_p(t)+a_p(t)y_p(t)=u(t)$$

$$\dot{\hat{y}}_p(t)+\hat{a}_p(t)y_p(t)=u(t)-a_m e(t),\quad a_m>0$$

$$e(t)=\hat{y}_p(t)-y_p(t)$$

$$\dot{e}(t)+a_m e(t)+\left(\hat{a}_p(t)-a_p(t)\right)y_p(t)=0$$

$$\phi(t)=\hat{a}_p(t)-a_p(t)$$

$$\omega(t)=-y_p(t)$$

$$(*)\quad \dot{e}(t)+a_m e(t)=\phi(t)\omega(t)$$

$$\dot{\phi}(t)=-e(t)\omega(t)=\dot{\hat{a}}_p(t)-\dot{a}_p(t)$$

$$\dot{\phi}(t)=-e(t)\omega(t)\underbrace{-\dot{a}_p(t)}_{\upsilon(t)},\qquad \left(\dot{\hat{a}}_p(t)=-e(t)\omega(t)\right)$$

acotada

$$(*)\quad \dot{\phi}(t)=-e(t)\omega(t)+\upsilon(t)$$

Analicemos primero el caso

acotada

$$\dot{e}(t) + a_m(t) = \phi^T(t)\omega(t) + \upsilon(t)$$

$$\dot{\phi}(t) = -e(t)\omega(t)$$

a) Modificación de la Ley de Ajuste de parámetros

b) Aumento del grado de excitación persistente de la entrada (o de la referencia)

a) Zona Muerta (Peterson Narendra 1982 IEEE TAC)

$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi(t)\omega(t) + \upsilon(t)$$

$$\dot{\phi}(t) \begin{cases} e(t)\omega(t) & si \quad |e| > \dfrac{\upsilon_0}{a_m} \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

υ_0 cota *sobre* $\upsilon(t)$ $\quad |\upsilon(t)| \le \upsilon_0$

$$V = \frac{1}{2}\left(e^2 + \phi^2\right)$$

$$\dot{V} = -a_m e^2 + e\upsilon$$

$$\dot{V} \le 0\,, \quad si\ |e| > \frac{\upsilon_0}{a_m}$$

El sistema podría ser inestable si está en la región

$$D \underset{=}{\Delta} \left\{ (e,\phi) \ / \ |e| \le \frac{\upsilon_0}{a_m} \right\}$$

Pero si estamos en D^C el sistema es estable.

Error está determinado por la magnitud de la zona muerta $\frac{\upsilon_0}{a_m}$

b) Cota sobre $||\theta^*||$ (Kreisselmeier Narendra 1982 IEEE TAC)

$$\|\theta^*\| \le \theta_m^*$$

$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi(t)\omega(t) + \upsilon(t)$$

$$\dot{\phi}(t) = -\theta(t)\omega(t) - \theta(t)\left[1 - \frac{\|\theta(t)\|}{\theta_m^*}\right]^2 f(\theta)$$

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 \ \text{si} \ |\theta(t)| > \theta_m^{\ *} \\ 0 \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

Si $\theta(t) \in S$ Ley de ajuste ideal

$$S = \{\theta \quad t.q. \quad \|\theta^*\| \le \theta_m^*\}$$

Si $\theta(t) \notin S$ Ley modificada para forzar $\theta \to S$

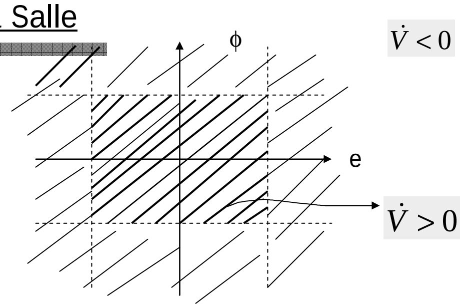
θ^*_m determina la magnitud del error

c) Modificación σ (Ioannou Kokotovic 1983 Springer Verlag)

$$\dot{e}(t)+a_m e(t)=\phi(t)\omega(t)+\upsilon(t)$$
$$\dot{\phi}(t)=-e(t)\omega(t)-\sigma\theta(t), \qquad \sigma>0$$

$$V=\frac{1}{2}(e^2+\phi^2)$$
$$\dot{V}=-a_m e^2+e\upsilon-\sigma\phi^2-\sigma\phi\theta^*$$
$$\dot{V}<0 \ \textit{fuera de la región compacta}$$
$$D\underset{=}{\Delta}\left\{(e,\phi)/\left|e\right|\le k_3 \ , \left|\phi\right|\le k_4\right\}, \qquad k_3,k_4>0$$

Teorema de La Salle



σ determina el error

$$\upsilon(t)\equiv 0\, y \ \textit{excitación persistente}, (e,\phi)\not\to 0$$

d) Modificación eθ (Narendra Annaswamy 1987 IEEE TAC)

$$\dot{e}(t) + a_m e(t) = \phi(t)\omega(t) + \upsilon(t)$$

$$\dot{\phi}(t) = -e(t)\omega(t) - \gamma\left|e(t)\right|\theta(t), \qquad \gamma > 0$$

$$V = \frac{1}{2}\left(e^2 + \phi^2\right)$$

$$\dot{V} = -a_m e^2 + e\upsilon - \gamma|e|\phi^2 - \gamma|e|\phi\theta*$$

$$\dot{V} \le -|e_1|\left[a_m|e_1| - \upsilon_0 + \gamma\phi\theta* + \gamma\phi^2\right]$$

$$\therefore \dot{V} < 0 \ en\ la\ región\ D^C$$

$$D \underline{\underline{\Delta}} \left\{ (e,\phi) / \quad \phi^2 + \phi\theta* + \frac{a_m}{\gamma}|e| - \frac{\upsilon_0}{\gamma} \le 0 \right\}$$

Teorema de La Salle

γ determina el error

Excitación Persistente (Narendra Annaswamy 1986 IEEE TAC)

$$\left.\begin{aligned}\dot{e}(t)+a_m e(t)&=\phi(t)\omega(t)+\upsilon(t)\\ \dot{\phi}(t)&=-e(t)\omega(t)\quad (ideal)\end{aligned}\right\}*$$

Teorema:

$$Sea\ \left|\upsilon(t)\right|\leq \upsilon_0,\qquad \left|y_m(t)\right|\leq Y_0$$

$$y_m\in\Omega_{(t_0,T_0)}\qquad i.e$$

$$\left|\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+\delta_0} y_m(\tau)\,d\tau\right|\geq \varepsilon_0$$

$$Si\quad Y_0<\frac{\upsilon_0}{a_m}\qquad \exists\,\upsilon(t)\ y\ C.I.$$

$$\upsilon(t)=\begin{cases}-\operatorname{sgn}(y_m)\upsilon_0 & si\quad |e_1|\geq Y_0\\ \operatorname{sgn}(y_m)\upsilon_0 & si\quad |e_1|<Y_0\end{cases}$$

$$t.q.\quad \lim_{t\to\infty}\phi(t)=-\infty\quad,\quad e(t)\to región\ |e|\leq Y_0+\varepsilon$$

b) $Si\quad \varepsilon_0\geq\frac{\upsilon_0}{am}+\delta\quad(\delta>0)$

Todas las soluciones de (*) son acotadas.

Único resultado global en esta categoría.

Control Adaptivo de Plantas Variables en el tiempo

$$\dot{x}_p = a_p(t)x_p + u(t)$$

$$\dot{x}_m = a_m x_m + r(t)$$

$$e(t) = x_p(t) - x_m(t)$$

$$\dot{e}(t) = a_m e(t) + \phi(t)x_p$$
$$\phi(t) = -e(t)x_p(t) - \dot{\theta}^*(t)$$

$$\dot{\theta}^* \in L^\infty$$

Cota sobre ||θ*||

$$\dot{\phi}(t) = -e(t)x_p(t) - \theta f(\theta) - \dot{\theta}*$$

$$f(\theta) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{|\theta|}{\theta_m^*}\right)^2 & si \;\; |\theta| > \theta_m^* \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

θ^*_m debe ser conocida

$$\left(\theta^* = a_m + a_0\right)$$
$$|a_p(t)| < a_0$$

Se demuestra que las soluciones son acotadas.

Modificación σθ

$$\dot{\phi}(t) = -e(t)x_p(t) - \sigma\theta - \dot{\theta}^*$$

Asegura mismo resultado.

Zona muerta y modificación $|e|\theta$ no se pueden aplicar directamente pues

$\dot{V}(e,\phi)$ no es n.d. fuera de una región compacta.