EM725

Control Adaptivo de Sistemas

Prof. Manuel A. Duarte Mermoud

Semestre Otoño 2006

7.0 Teoría de Observadores

Introducción

- Aspectos básicos de ambas teorías que permitan entender los adelantos en estas áreas.
- No se verán todos los diferentes enfoques existentes por razones de tiempo.
- Presentación para sistemas de tiempo continuo aunque todos (prácticamente) los resultados de han extendido al caso de sistemas de tiempo discreto.
- Teoría de Observadores fines de los 50´s. Primeros resultados comienzo de los 60´s, David Luenberger Universidad de Stanford.
- Estimar el estado de un sistema a partir del conocimiento de la entrada u(t), la salida y(t), y los parámetros A, B, C, D de la planta con $t \in [t_0,\infty]$.
- Estimador "clásico" del estado completo (orden n) y reducido (orden n-p).
- Observadores Óptimos. Estimación del estado y minimización de una función de costo.
- Principio de Separación.

Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$
$$x \in \Re^n, u \in \Re^m, y \in \Re^p$$
$$A \in \Re^{n\times m}, B \in \Re^{n\times m}, C \in \Re^{p\times n}, D \in \Re^{p\times m}$$

A,B,C,D constantes y conocidas

$$y(t), u(t) \quad \text{conocidas} \quad \forall t \in (t_0, \infty)$$
$$x(t), x(t_0) \quad \text{desconocidos}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad , \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \quad ,$$
$$\hat{x} \in \Re^n, \hat{y} \in \Re^p$$

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad \in \Re^n$$
$$e_y(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad \in \Re^m$$

$$\dot{e}(t) = Ae(t) \quad , \quad e(t_0) = e_0$$
$$e_y(t) = Ce(t) \quad ,$$

$$A\ a.e. \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \wedge \lim_{t\to\infty} e_y(t) = 0$$

Convergencia Limitada

Luenberger 1964 (Observador completo (n))

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \underline{- F(\hat{y}(t) - y(t))},$$
$$\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0,$$
$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t),$$
$$\hat{x} \in \Re^n, \hat{y} \in \Re^P$$

$$\dot{e}(t) = (A - FC)e(t), \quad e(t_0) = e_0$$
$$e_y(t) = Ce(t)$$

<u>Teorema</u>

(A,C) completamente observable $\Rightarrow \exists F / t.q. \quad A - FC = E$ tiene espectro arbitrario

Lo polos de E, $\{\lambda_i\}^E$ se localizan en cualquier parte del plano complejo.

Diseño Observador $\Longrightarrow$ escoger F/ $\{\lambda_i\}^E$ es el deseado

- E asintóticamente estable

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \to \infty} e_y(t) = 0$$

$\{\lambda_i\}^E$ / convergencia es adecuada

Si R_e $\{\lambda_i\} \to -\infty$, diferenciador, rápida convergencia

Si R_e $\{\lambda_i\} \to 0$, convergencia lenta

R_e $\{\lambda_i\} \to$ levemente superior a polos del sistema

Caso Monovariable:

$$A \in \Re^{n \times n}, \quad b, c \in \Re^n, \quad d \in \Re, \quad f \in \Re^n$$

Par (C^T, A) en forma canónica observable

$$A=\begin{bmatrix} 0 & ---- & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & ---- & -a_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad c=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f=[\,f_0\, f_1 \ldots f_{n-1}]^T$$

$$A-fc^T=E=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0-f_0 \\ 1 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}-f_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+-----+a_1\lambda+a_0$$

$$P_E(\lambda)=\lambda^n+\left(a_{n-1}+f_{n-1}\right)+-----+\left(a_1+f_1\right)\lambda+(a_0+f_0)=0$$

$$=\lambda^n+e_{n-1}\lambda^{n-1}+-----+e_1\lambda+e_0$$

$$a_i+f_i=e_i \quad i=0,1,\ldots n-1$$

e_i especificado

a_i dado

$\Big\}$ f_i calculado

Caso general (C,A) también existe procedimiento para determinar F / A-FC=E tiene polos arbitrarios.

EJEMPLO DE DISEÑO DE OBSERVADORES

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u(t), \qquad x(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Polos

-1

$+2$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x(t)+3u(t), \qquad f=\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

$$E=(A-fc^T)=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} f_0 & 0 \\ f_1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1-f_0 & 1 \\ 2-f_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_e(\lambda) = \lambda^2 + (1 + f_0)\lambda + f_1 - 2$$

Polos deseados –1y –2 $\longrightarrow$

$$P_E(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 + f_0 = 3 \\ f_1 - 2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f_0 = 2 \\ f_1 = 4 \end{array} \Rightarrow E = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}_{A - fc^T} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} y(t)$$

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + 3u(t), \qquad \hat{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{10} \\ \hat{x}_{20} \end{bmatrix}$$

arbitrario

O bien

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} (\hat{y}(t) - y(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + 3u(t)$$

Observador Reducido (n-p)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (D = 0)$$

$$x \in \Re^n, \quad y \in \Re^p, \quad u \in \Re^m$$

$$r(C) = p$$

$$M = \begin{bmatrix} C \\ G \end{bmatrix} \quad M \in \Re^{n \times n} \quad \begin{array}{l} CE\Re^{p \times n} \\ G \in \Re^{(n-p) \times n} \end{array}$$

M no singular $\longrightarrow$ **G** arbitraria

$$\bar{x} = Mx = \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx \\ \hline Gx \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} y\ conocida \\ w\ desconocida \end{matrix}$$

Sistema transformado

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \qquad \begin{matrix} \bar{A} = MAM^{-1} \\ \bar{B} = MB \end{matrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{y}(t) = A_{11}y(t) + A_{12}w(t) + B_1u(t) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$
$$\dot{w}(t) = A_{21}y(t) + A_{22}w(t) + B_2u(t) \quad , \quad w(t_0) = w_0$$

Observador de orden (n-p) solamente

$$\dot{\hat{w}}(t) = (A_{22} - FA_{12})\hat{w}(t) + A_{21}y(t) + B_2u(t) +$$
$$+ F(\dot{y}(t) - A_{11}y(t) - B_1u(t)), \quad \hat{w}(t_0) = \hat{w}_0$$
$$F \in \Re^{(n-p)\times p}$$
$$Si \quad (C, A)\ es\ c.o. \Rightarrow (A_{12}, A_{22})\ es\ c.o.$$

Evitar diferenciación de y(t)

$$z(t) = \hat{w}(t) - Fy(t)$$
$$\dot{z}(t) = (A_{22} - FA_{12})z(t) + (A_{22} - FA_{12})Fy(t)$$
$$+ (A_{21} - FA_{11})y(t) + (B_2 - FB,)u(t)$$

$$\hat{w}(t) = z(t) + Fy(t)$$
$$e_w(t) = \hat{w}(t) - w(t)$$

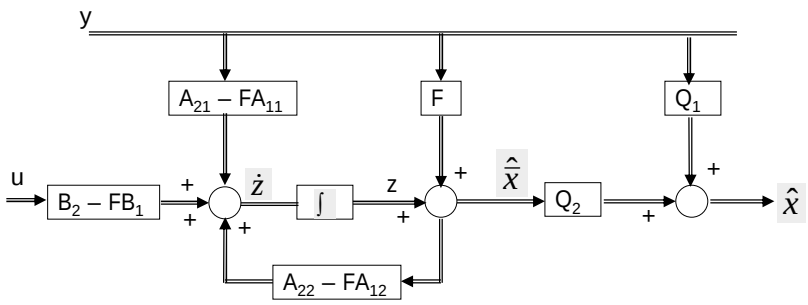
$$\dot{e}_w(t) = (A_{22} - FA_{12})e_w(t), \quad e_w(t_0) = e_{w0}$$

$$A_{22} - FA_{12} = E \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$$

$$A_{22} \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$$

$$A_{12} \in \Re^{p\times(n-p)}$$

$$F \in \Re^{(n-p)\times p}$$



Observadores Óptimos

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (D = 0)$$

$$x \in \Re^n, u \in \Re^m, \quad y \in \Re^p, \quad p > 1$$

$$A \in \Re^{n\times n}, B \in \Re^{n\times m}, C \in \Re^{p\times n}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \cdots \\ w(t) \end{bmatrix} \qquad r(C) = p < n$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \cdots \\ B_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} I_p \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observador: (Ramar y Gourishankar 1978)

$$\dot{z} = Fz(t) + Hu(t) + Gy(t)$$

$$F = A_{22} + LA_{12} \qquad L : por \text{ determinar}$$

$$\mathrm{G} = \text{-}\mathrm{FL} + \mathrm{LA}_{11} + A_{21} \qquad L \in \Re^{(n-p)\times p}$$

$$H = B_2 + LB_1$$

$$\hat{w}(t) = z(t) - Ly(t)$$

$$e(t) \underline{\underline{\Delta}} w(t) - \hat{w}(t)$$

$$\dot{e}(t) = Fe(t), \qquad e(0) = e_0$$

$$J = \int_0^\infty e^T(\tau) Q e(\tau) d\tau$$

Valores propios S_1, S_2.....S_{n-p}

$$F = A_{22} + \overline{L}\ \overline{A}_{12} + \hat{L}\ \hat{A}_{12}^T$$

Fila i de A_{12}

L sin col i de L

Col i de L

Filas de A_{12} sin fila i

Reformular

$$J = e^T(0) V e(0) \quad ; \quad VF + F^T V = -Q$$

$$J_3 = J_1 + \alpha\, J_2 \qquad \textit{funcional aumentada}$$

$$J_1 = +r[V] \qquad J_2 = \|\overline{L}\| = \sum_i \sum_j \overline{\ell}_{ij}^2$$

$$\overline{\ell}_{ij} \quad \textit{elementos de } I$$

Minimización usando Técnica numérica para encontrar $\overline{L}.\ \min_{\overline{L}}\ J_3$

$\hat{L}$ Se obtiene usando técnica de localización de polos

$$F = A_{22} + \bar{L}\,\bar{A}_{12} + \hat{L}\,\hat{A}_{12}^{T}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q = I \qquad s_1 = s_2 = -4 \qquad \alpha = 0.0001$

resulta:

$$L = \begin{bmatrix} -1.386 & 0.843 \\ -0.4472 & -3614 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad G = \begin{bmatrix} -1.483 & 6.058 \\ -17808 & -12.684 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observador no óptimo con $s_1 = s_2 = -4$

$$L = \begin{bmatrix} 3.0 & -25.0 \\ 1.0 & -8.0 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1.0 & -25 \\ 1.0 & -9 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 16 & 149 \\ 4 & 39 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Otros Observadores óptimos:

Kung & Yeh 1980

- No resuelve eq. de Lyapunov
- No necesita técnica de asignación de polos
- Usan conceptos de función de pulso por bloques

$$L = \begin{bmatrix} 2.45 & -2.51 \\ 7.9 & -7.45 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 13.8 & -14.04 \\ 31.6 & -35.7 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kwon & Youn 1986

$$J = \int_0^\infty t^k e^T(t) Q e(t) dt + r \cdot tr\left[L^T L\right]$$

$$r > 0 \quad , \quad Q > 0 \quad , \quad k \geq 0$$

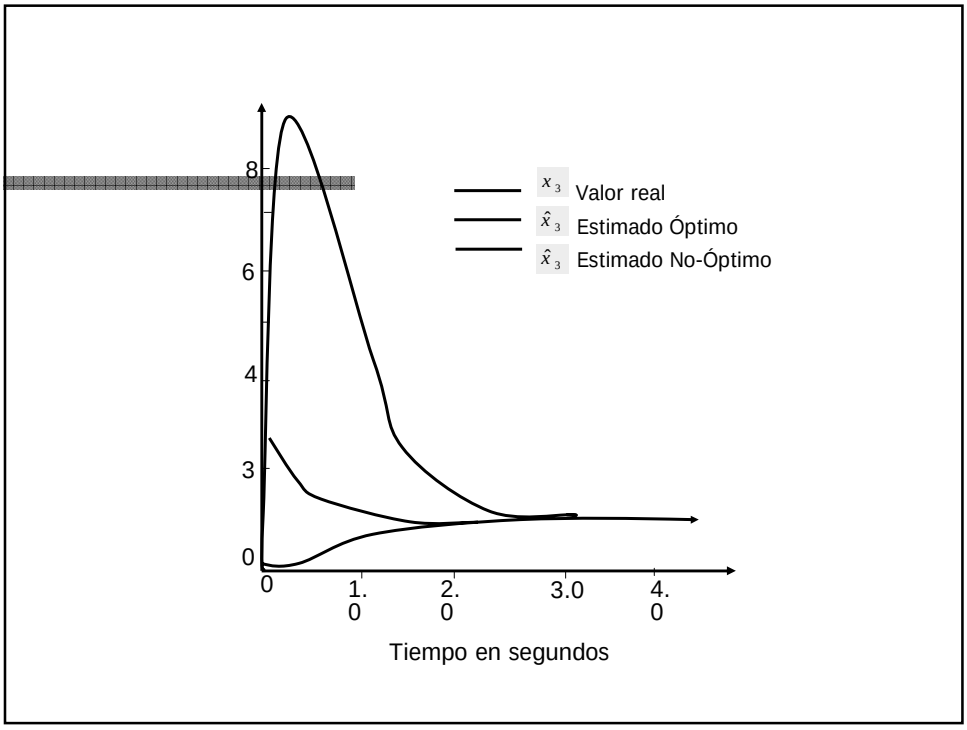
Mismo ejemplo anterior $r = 0.00001$

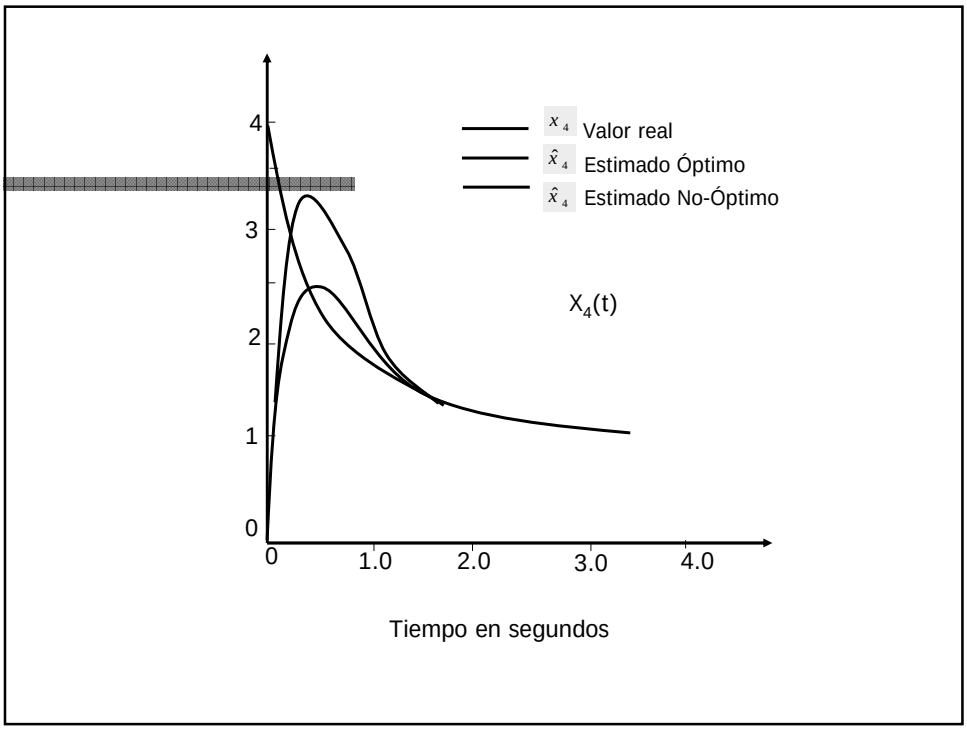
$$e(0) = [2\,,4]^T\,, \quad Q = I, \quad s_1 = -4\,, s_2 = -5$$

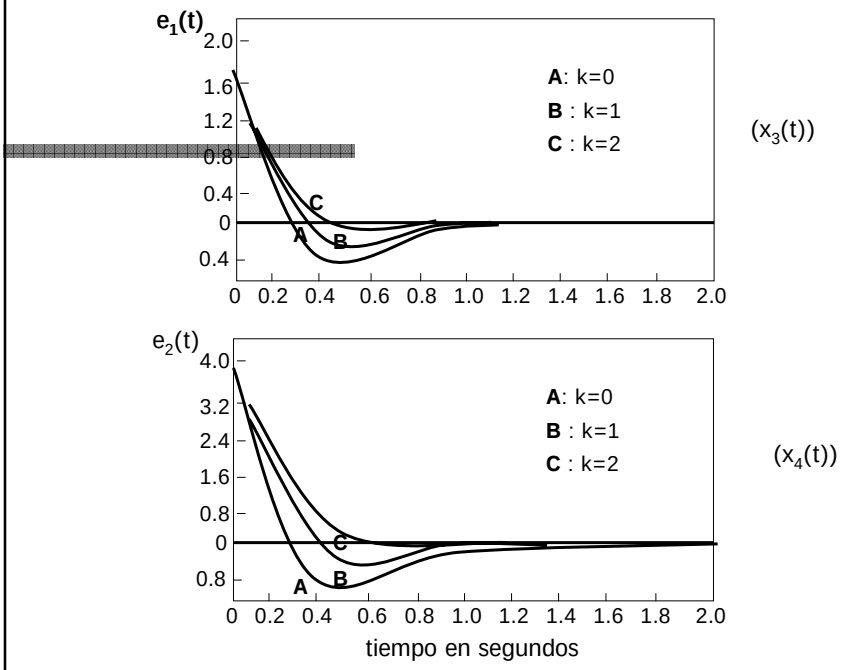
$$k = 0 \qquad L = \begin{bmatrix} 14.923 & -11.413 \\ 26.576 & -20.293 \end{bmatrix}$$

$$k = 1 \qquad L = \begin{bmatrix} 6.462 & -6.354 \\ 12.601 & -12.462 \end{bmatrix}$$

$$k = 2 \qquad L = \begin{bmatrix} 3.011 & -4.206 \\ 7.162 & -9.011 \end{bmatrix}$$

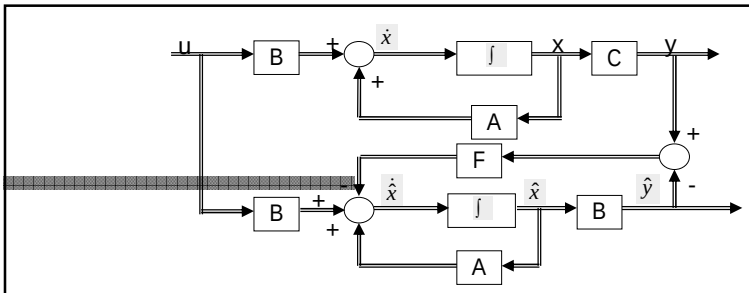

8
6
4
3
0
0
1.
0
2.
0
3.0
4.
0
Tiempo en segundos
x_3 Valor real
$\hat{x}_3$ Estimado Óptimo
$\hat{x}_3$ Estimado No-Óptimo


4
3
2
1
0
0
1.0
2.0
3.0
4.0
Tiempo en segundos
x_4 Valor real
$\hat{x}_4$ Estimado Óptimo
$\hat{x}_4$ Estimado No-Óptimo
$X_4(t)$

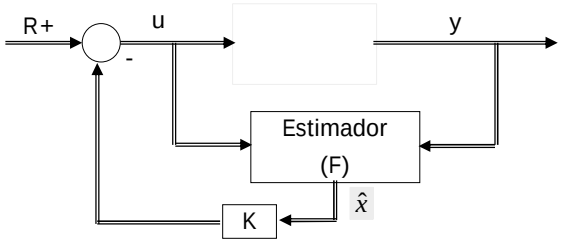


($x_3(t)$)

($x_4(t)$)



Observador de Estado Completo



Principio de separación

Principio de Separación

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

(A, B) Completamente controlable

$$u = -Kx(t) + r \quad x(t): disponible$$
$$r: referencia$$
$$\dot{x}(t) = (A - BK)\, x(t) + Br(t)$$

$$(A, B) \quad c.c. \rightarrow \exists\, K \quad t.q. \quad A - BK \quad \text{posee polos arbitrarios}$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t) + r(t)$$

(C, A) completamente observable

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t) + Br(t)$$
$$e(t) \triangleq \hat{x}(t) - x(t)$$

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) - BKe(t) \quad + Br(t)$$
$$\dot{e}(t) = (A - FC)e(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A_FC \end{bmatrix}}_{E} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

$$S(E) = S(A - BK)\, U\, S\,(A - FC)$$

Conclusiones

- Introducción de un términos estabilizador $F(\hat{y}-y)$ y que además maneja convergencia.
- Procedimiento de diseño a través de F con la condición de observabilidad completa.
- Refinamientos -Reducción del orden del observador
  -Observadores óptimos