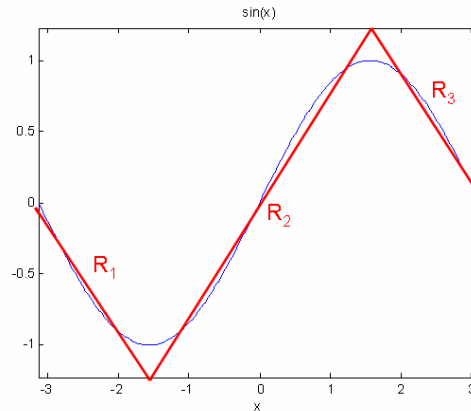


## Clase Auxiliar Martes 9 de mayo

### 1.- Utilidad de los modelos difuso

A través de la modelación de Takagi y Sugeno, es posible realizar aproximación de funciones no lineal a través de un conjunto de funciones lineales.

Para entender lo anterior, aproximaremos la función  $\sin(x)$  a través de rectas en el intervalo  $[-\pi, \pi]$



Como se muestra en el gráfico anterior, podemos visualizar al menos tres zonas en donde podemos usar rectas. La zona 1, que va desde  $-\pi$  a  $\pi/2$ , la zona 2 que va desde  $-\pi/2$  hasta  $\pi/2$  y la zona 3 desde  $\pi/2$  hasta  $\pi$ .

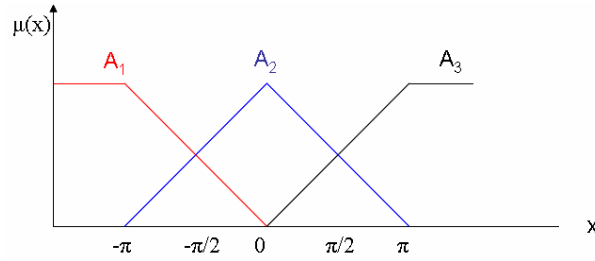
Llamemos  $R_i$  a la recta del grupo  $i$ -ésimo. Entonces, una aproximación de  $\sin(x)$  se puede definir a través de las siguientes reglas:

“Si  $x$  está en la zona  $i$ , entonces la aproximación de  $\sin(x)$  es  $R_i$ ”

Definamos  $R_i(x) = p_0^i + p_1^i \cdot x$

De la gráfica se ve que hay zonas en donde no es claro decir a que recta le corresponde representar la función, en especial en torno a los puntos  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ . Intuitivamente podemos hablar de una zona difusa, y en lenguaje de la calle podemos decir que “y tiene algo de  $R_1$ , pero también algo de  $R_2$ ”, y la manera de representar lo anterior es a través del grado de pertenencia de la regla.

Por otro lado ¿Es fácil decir que  $-\pi/2$  pertenece a la zona 1 o a la zona 2? En otras palabras ¿Qué recta le asignamos? Es por esta razón que se definen los conjuntos de pertenencia, en los cuales para cada elemento se indica con que grado pertenece a un conjunto o a otro. En los casos extremos, es claro que  $\pi$  no puede pertenecer a la zona 1 (o lo hace con un grado mínimo). Lo anterior se refleja en el siguiente gráfico



Como se vio en clases, el grado de activación de la reglas viene dado por el grado de pertenencia “relativa” de la variable al conjunto al cual está asociada dicha regla.

Finalmente, la aproximación de  $\sin(x)$  viene dada por:

$$\hat{y}(x) = R_1(x) \frac{\mu_1(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x)} + R_2(x) \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x)} + R_3(x) \frac{\mu_3(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x)}$$

Los grados de pertenencia relativa indican cual es el peso de una determinada regla en un punto dado.

Ahora se debe determinar cuáles son los parámetros de las rectas y para ello ocuparemos una técnica muy parecida a la ya vista:

Definiendo:

$$\beta_1(x) = \frac{\mu_1(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x)}; \beta_2(x) = \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x)}; \beta_3(x) = \frac{\mu_3(x)}{\mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x)}$$

$$\hat{y}(x) = p_0^1 \beta_1(x) + p_1^1 x \cdot \beta_1(x) + p_0^2 \beta_2(x) + p_1^2 x \cdot \beta_2(x) + p_0^3 \beta_3(x) + p_1^3 x \cdot \beta_3(x)$$

Definiendo:

$$u_1(x) = \beta_1(x); u_2(x) = x \cdot \beta_1(x)$$

$$u_3(x) = \beta_2(x); u_4(x) = x \cdot \beta_2(x)$$

$$u_5(x) = \beta_3(x); u_6(x) = x \cdot \beta_3(x)$$

$$\hat{y}(x) = p_0^1 u_1(x) + p_1^1 u_2(x) + p_0^2 u_3(x) + p_1^2 u_4(x) + p_0^3 u_5(x) + p_1^3 u_6(x)$$

¿Se parece a algo que se haya visto? Nuevamente otra definición:

$$\phi(t)^T = [u_1(t) \ u_2(t) \ u_3(t) \ u_4(t) \ u_5(t) \ u_6(t)]$$

$$\theta = [p_0^1 \ p_1^1 \ p_0^2 \ p_1^2 \ p_0^3 \ p_1^3]^T$$

$$\hat{y}(t) = \phi^T(t) \theta$$

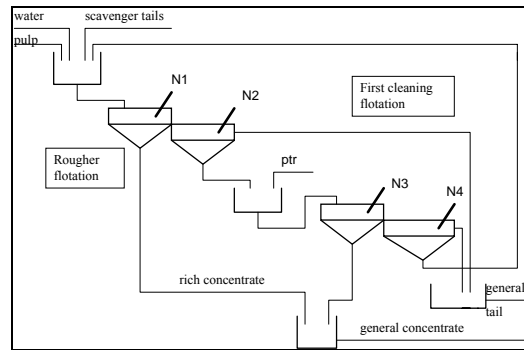
Y el vector de parámetros está dado por:

$$\theta = (\phi\phi^T)^{-1}(\phi y)$$

Como vimos en la parte anterior, la aproximación en espacios de Hilbert depende de la elección de las bases, lo que para este caso se traduce en la elección de las funciones de pertenencia, tanto en su número como en su forma.

## 2.- Aplicación a la identificación de sistemas

La siguiente figura muestra un diagrama de una planta de flotación. Se considera como variable controlada la ley del mineral  $G_t$  y como variable manipulada el nivel de estanque N2.

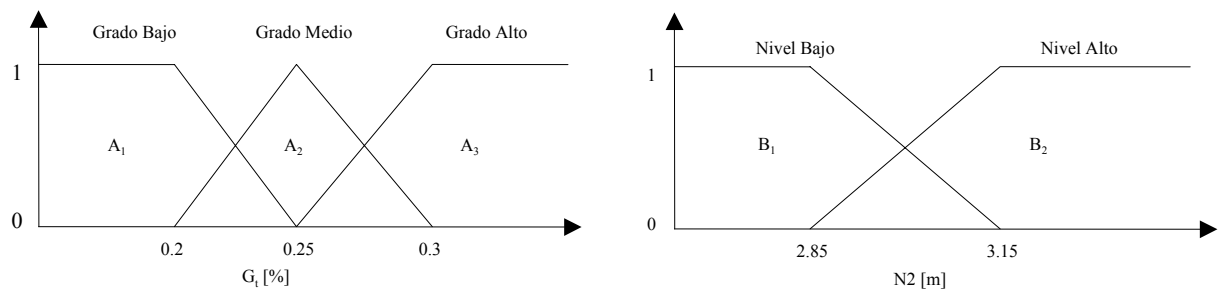


Para el siguiente modelo difuso de la planta de flotación:

$R_i$  : Si  $G_t(t-1)$  es  $A_j$  y  $N2(t-1)$  es  $B_k$

Entonces  $G_t^i(t) = p_0^i + p_1^i G_t(t-1) + p_2^i G_t(t-2) + p_3^i \Delta N2(t-1)$

donde  $j = 1, 2, 3$  y  $k = 1, 2$  las funciones de pertenencia se muestran en la siguiente figura.



Plantear un algoritmo de identificación para calcular los parámetros de las consecuencias del modelo difuso.

La cantidad de reglas estará dada por el total de combinaciones posibles entre los conjuntos de las variables de los antecedentes: para  $G_t(t-1)$  hay 3 conjuntos y para  $N_2(t-1)$  hay 2 conjuntos. Luego, hay seis reglas.

$$\begin{aligned} G_t^1(t) &= p_0^1 + p_1^1 G_t(t-1) + p_2^1 G_t(t-2) + p_3^1 N(t-1) \\ &\vdots \\ G_t^6(t) &= p_0^6 + p_1^6 G_t(t-1) + p_2^6 G_t(t-2) + p_3^6 N(t-1) \end{aligned}$$

$$\hat{y}(t) = \frac{\sum_i G_t^i(t) \mu_{regla\_i}(t)}{\sum_i \mu_{regla\_i}(t)}$$

Los grados de activación de las reglas están dados por el producto de las funciones de pertenencias de las variables de los antecedentes evaluadas en cada instante. Supongamos que la regla  $i$ -ésima es aquella que considera el caso cuando  $G_t(t-1)$  es  $A_p$  y  $N_2(t-1)$  es  $B_q$ . Luego:

$$\mu_{regla\_i}(t) = \mu_{A_p}(G_t(t-1)) \cdot \mu_{B_q}(N_2(t-1))$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} \beta_{i0}(t) &= \frac{\mu_{regla\_i}(t)}{\sum_j \mu_{regla\_j}(t)}; \beta_{i1}(t) = \frac{G_t(t-1) \mu_{regla\_i}(t)}{\sum_j \mu_{regla\_j}(t)}; \beta_{i2}(t) = \frac{G_t(t-2) \mu_{regla\_i}(t)}{\sum_j \mu_{regla\_j}(t)} \\ \beta_{i3}(t) &= \frac{N_2(t-1) \mu_{regla\_i}(t)}{\sum_j \mu_{regla\_j}(t)}; \end{aligned}$$

Podemos escribir la estimación de la siguiente manera:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=0}^3 p_j^i \beta_{ij}(t)$$

Sean:

$$\begin{aligned} \theta &= [p_0^1 \ p_1^1 \ p_2^1 \ p_3^1 \ \cdots \ p_0^6 \ p_1^6 \ p_2^6 \ p_3^6]^T \\ \phi^T(t) &= [\beta_{i0}(t) \ \beta_{i1}(t) \ \beta_{i2}(t) \ \beta_{i3}(t) \ \cdots \ \beta_{60}(t) \ \beta_{61}(t) \ \beta_{62}(t) \ \beta_{63}(t)] \end{aligned}$$

De esta forma:

$$\hat{y}(t) = \phi^T(t) \theta$$

Y la solución de esto ya es conocida. El vector de parámetros que entrega la mejor aproximación es:

$$\theta = (\phi\phi^T)^{-1}(\phi y)$$