Teoría de Observadores

Introducción

- Teoría de Observadores: fines de los 50'. Primeros resultados: principios de los 60' David Luenberger. Universidad de Stanford.

- Estimar el estado de un sistema a partir del conocimiento de la entrada u(t), salida y(t) y parámetros A, B, C y D de la planta con $t \in [t_0, \infty)$.

- Estimador "clásico" del estado completo (orden n) y reducido (orden n - p).

- Observadores óptimos. Estimación del estado y minimización de función de costo.

- Principio de separación.

Teoría de Observadores

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \qquad X(t_0) = X_0$$
$$Y(t) = CX(t) + DU(t)$$

$$X \in \Re^n, \quad U \in \Re^m, \quad Y \in \Re^p$$
$$A \in \Re^{n\times n}, \quad B \in \Re^{n\times m}, \quad C \in \Re^{p\times n}, \quad D \in \Re^{p\times m}$$

A, B, C, D: constantes y conocidas.

Y(t), U(t): conocidas $\forall\, t \in [t_0, \infty)$

X(t), X(t_0): desconocidos.

$$\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + BU(t) \qquad \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0$$
$$\hat{Y}(t) = C\hat{X}(t) + DU(t) \qquad \hat{X}(t) \in \Re^n, \quad \hat{Y} \in \Re^p$$

$$e(t) = \hat{X}(t) - x(t) \in \Re^n$$
$$e_Y(t) = \hat{Y}(t) - Y(t) \in \Re^m$$

$$\dot{e}(t) = Ae(t) \qquad e(t_0) = e_0$$
$$e_Y(t) = Ce(t)$$

$$A \text{ a.e. } \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0 & \wedge \\ \lim\limits_{t\to\infty} e_Y(t) = 0 \end{cases}$$

convergencia limitada

Observador Completo (n)
Luenberger 1964

$$\dot{\hat{X}}(t) = AX(t) + BU(t) - F\left(\hat{Y}(t) - Y(t)\right),$$
$$\hat{X}(t_0) = \hat{X}_0\,,$$
$$\hat{Y}(t) = C\hat{X}(t) + DU(t),$$
$$\hat{X} \in \Re^n, \quad \hat{Y} \in \Re^p$$

$$\dot{e}(t) = (A - FC)e(t), \qquad e(t_0) = e_0$$
$$e_Y(t) = Ce(t)$$

Teorema

(A, C) completamente observable, entonces:

$$\exists F \;/\; \text{si} \;\; A - FC = E, \quad \{\lambda_i\}^{E}_{i=1,\ldots,n}$$

se localizan en cualquier parte del plano complejo.

Diseño observador:

$$\Rightarrow \text{escoger} \;\; F \,/\, \{\lambda_i\}^{E} \text{ es el deseado}$$

- E asintóticamente estable

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} e_Y(t) = 0$$

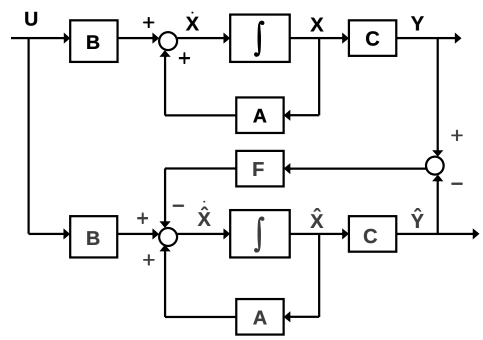
- $\{\lambda_i\}^{E}$ / convergencia es adecuada.

Si $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \to -\infty$, diferenciador, rápida convergencia

Si $\mathrm{Re}\{\lambda_i\} \to 0$ convergencia lenta

$\mathrm{Re}\{\lambda_i\}$ levemente superior a polos del sistema

Observador de Estado Completo



Caso Monovariable

$$A \in \Re^{n\times n}, \;\; b, c \in \Re^{n}, \; d \in \Re, \; f \in \Re^{n}$$

Par (c^T, A) en forma canónica observable.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & f_{n-1} \end{bmatrix}^T$$

$$A - fc^T = E = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 - f_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \vdots & -a_1 - f_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} - f_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

$$P_E(\lambda) = \lambda^n + (a_{n-1} + f_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 + f_1)\lambda + (a_0 + f_0) = 0$$

$$= \lambda^n + e_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + e_1\lambda + e_0$$

$$a_i + f_i = e_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\left.\begin{array}{ll} e_i & \text{especificado} \\ a_i & \text{dado} \end{array}\right\} f_i \;\; \text{calculado}$$

Caso General

(C, A) también existe procedimiento para determinar

$$F \;/\; A - FC = E$$

Ejemplo de Diseño de Observadores

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(t) \qquad x(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)+3\,u(t) \quad f=\begin{bmatrix}f_0\\ f_1\end{bmatrix} \quad \text{Polos : - 1, 2}$$

$$E=\left(A-fc^T\right)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}f_0 & 0\\ f_1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-f_0 & 1\\ 2-f_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$P_E(\lambda)=\lambda^2+(1+f_0)\lambda+f_1-2$$

Polos deseados: -1 y –2 $\Rightarrow$

$$P_E(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+2)=\lambda^2+3\lambda+2$$

$$\left.\begin{matrix}1+f_0=3\\ f_1-2=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow \quad \begin{matrix}f_0=2\\ f_1=4\end{matrix} \quad \Rightarrow E=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}}(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}}_{A-fc^T}\hat{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}y(t)$$

$$\hat{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\hat{x}(t)+3u(t) \qquad \hat{x}(t_0)=\begin{bmatrix}\hat{x}_{10}\\ \hat{x}_{20}\end{bmatrix}$$

arbitrario

o bien

$$\dot{\hat{x}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\hat{x}(t)-\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}(\hat{y}(t)-y(t))+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u(t)$$

$$\hat{y}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\hat{x}(t)+3u(t)$$

Caso de Tiempo Discreto

$$X(t+1)=AX(t)+BU(t) \quad X(t_0)=X_0$$
$$Y(t)=CX(t)+DU(t)$$

$$X\in\Re^n,\quad U\in\Re^m,\quad Y\in\Re^p$$
$$A\in\Re^{n\times n},\quad B\in\Re^{n\times m},\quad C\in\Re^{p\times n},\quad D\in\Re^{p\times m}$$

A, B, C, D: constantes y conocidas.

$Y(t)$, $U(t)$: conocidas $\forall\, t\in[t_0,\infty)$

$X(t)$, $X(t_0)$: desconocidos.

Observador de Orden Completo (n)
Luenberger 1964

$$\hat{X}(t+1)=AX(t)+BU(t)-F(\hat{Y}(t)-Y(t)),$$
$$\hat{X}(t_0)=\hat{X}_0,$$
$$\hat{Y}(t)=C\hat{X}(t)+DU(t),$$
$$\hat{X}\in\Re^n,\ \hat{Y}\in\Re^p$$

$$e(t)=\hat{X}(t)-X(t)\in\Re^n$$
$$e_Y(t)=\hat{Y}(t)-Y(t)\in\Re^m$$

$$e(t+1)=(A-FC)e(t),\ e(t_0)=e_0$$
$$e_Y(t)=Ce(t)$$

$$\text{A-FC a.e.} \Rightarrow \begin{cases}\lim_{t\to\infty} e(t)=0\ \wedge\\ \lim_{t\to\infty} e_Y(t)=0\end{cases}$$

Convergencia manejable

Recordemos Teorema

(A, C) completamente observable, entonces:

$$\exists F \;/\; \text{si} \;\; A - FC = E, \quad \{\lambda_i\}^{E}_{i=1,\dots,n}$$

se localizan en cualquier parte del plano complejo.

Diseño observador:

$$\Rightarrow \text{escoger} \;\; F \;/\; \{\lambda_i\}^{E} \;\text{es el deseado}$$

- E asintóticamente estable

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} e_Y(t) = 0$$

- $\{\lambda_i\}^{E}$ / convergencia es adecuada.

Si $|\lambda_i| \to 0$ Convergencia Rápida

Si $|\lambda_i| \to 1$ Convergencia lenta

Escoger v.p. de velocidad levemente superior a polos del sistema

Observador Reducido (n - p)

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \qquad X(t_0) = X_0$$
$$Y(t) = CX(t) \qquad (D = 0)$$
$$r(C) = p$$

$$M = \begin{bmatrix} C \\ G \end{bmatrix} \quad M \in \Re^{n\times n}, \quad C \in \Re^{p\times n}, \quad G \in \Re^{(n-p)\times n}$$

M no singular $\Rightarrow$ G arbitraria

$$\overline{X} = MX = \begin{bmatrix} Y \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CX \\ GX \end{bmatrix}$$

Y conocida
W desconocida

Sistema transformado:

$$\dot{\overline{X}} = \overline{A}\,\overline{X}(t) + \overline{B}U(t), \quad \overline{X}(t_0) = \overline{X}_0, \quad \overline{A} = MAM^{-1}$$
$$\overline{B} = MB$$

$$\dot{Y}(t) = A_{11}Y(t) + A_{12}W(t) + B_1U(t), \quad Y(t_0) = Y_0$$
$$\dot{W}(t) = A_{21}Y(t) + A_{22}W(t) + B_2U(t), \quad W(t_0) = W_0$$

Observador de Orden (n – p) solamente

$$\dot{\hat{W}}(t) = (A_{22} - FA_{12})\hat{W}(t) + A_{21}Y(t) + B_2U(t) +$$
$$+ F\left(\dot{Y}(t) - A_{11}Y(t) - B_1U(t)\right)$$
$$\hat{W}(t_0) = \hat{W}_0, \qquad F \in \Re^{(n-p)\times p}$$

Si (C, A) es c.o. $\Rightarrow$ (A_{12}, A_{22}) es c.o.

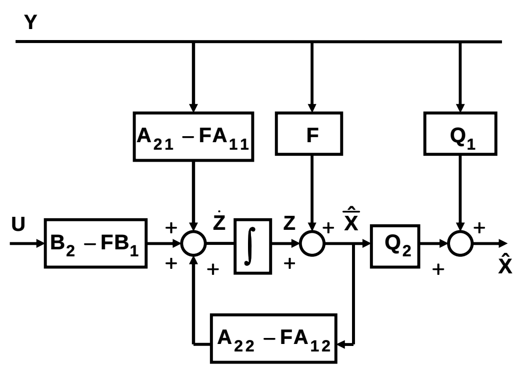
evitar diferenciación de Y(t)

$$Z(t) = \hat{W}(t) - FY(t)$$

$$\dot{Z}(t) = (A_{22} - FA_{12})Z(t) + (A_{22} - FA_{12})FY(t) +$$
$$+ (A_{21} - FA_{11})Y(t) + (B_2 - FB_1)U(t)$$

$$\hat{W}(t) = Z(t) + FY(t)$$
$$e_W(t) = \hat{W}(t) - W(t)$$
$$\dot{e}_W(t) = (A_{22} - FA_{12})e_W(t), \qquad e_W(t_0) = e_{W_0}$$

$$A_{22} - FA_{12} = E \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$$
$$A_{22} \in \Re^{(n-p)\times(n-p)}$$
$$A_{12} \in \Re^{p\times(n-p)}, \qquad F \in \Re^{(n-p)\times p}$$



Observadores Óptimos

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$
$$Y(t) = CX(t) \qquad (D = 0)$$

$X \in \Re^n$, $U \in \Re^r$, $Y \in \Re^m$, $m > 1$

$A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times r}$, $C \in \Re^{m\times n}$

$$X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ \hline W(t) \end{bmatrix} \qquad r(C) = m < n$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \hline B_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} I_m \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

Observador: (Ramar y Gourishankar 1978)

$$\dot{Z} = FZ(t) + HU(t) + GY(t)$$

$F = A_{22} + LA_{12}$ — L por determinar

$G = -FL + LA_{11} + A_{21}$ — $L \in \Re^{(n-m)\times m}$

$H = B_2 + LB_1$

$$\hat{W}(t) = Z(t) - LY(t)$$
$$e(t) \overset{\Delta}{=} W(t) - \hat{W}(t)$$
$$\dot{e}(t) = Fe(t) \qquad e(0) = e_0$$

$$J = \int_0^\infty e^T(\tau) Q\, e(\tau) d\tau$$

Valores propios: $s_1, s_2, \ldots, s_{n\text{-}m}$

$$F = A_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12} + \hat{L}\hat{A}_{12}^T$$

L sin columna i de L — $\bar{L}$

Filas de A_{12} sin fila i — $\bar{A}_{12}$

Columna i de L — $\hat{L}$

Fila i de A_{12} — $\hat{A}_{12}^T$

Reformular:

$$J = e^T(0)Ve(0), \quad VF + F^TV = -Q$$

$J_3 = J_1 + \alpha J_2$ — Funcional aumentada

$J_1 = tr\,[V]$

$J_2 = \|\bar{L}\| = \sum_i \sum_j \ell_{ij}^2$ — $\bar{\ell}_{ij}$ elementos de $\bar{L}$

Minimización usando técnica numérica para encontrar $\bar{L}$

$$\min_{\bar{L}} J_3$$

$\hat{L}$ se obtiene usando técnica de localización de polos

$$F = A_{22} + \bar{L}\bar{A}_{12} + \hat{L}\hat{A}_{12}^T$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q = I \qquad s_1 = s_2 = -4 \qquad \alpha = 0{,}0001$

resulta

$$L = \begin{bmatrix} -1{,}386 & 0{,}843 \\ -0{,}4472 & -3{,}614 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G = \begin{bmatrix} -1{,}483 & 6{,}058 \\ -1{,}7808 & -12{,}684 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observador no óptimo con $s_1 = s_2 = -4$

$$L = \begin{bmatrix} 3{,}0 & -25{,}0 \\ 1{,}0 & -8{,}0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1{,}0 & -25 \\ 1{,}0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 16 & -149 \\ 4 & -39 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observadores Óptimos

•Kung & Yeh – 1980

•No resuelve ecuaciones de Lyapunov

•No necesita técnica de asignación de polos

•Usan concepto de funciones de pulso por bloques

$$L = \begin{bmatrix} 2{,}45 & -2{,}51 \\ 7{,}9 & -7{,}45 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 13{,}8 & -14{,}04 \\ 31{,}6 & -35{,}7 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

•Kwon & Youn – 1986

$$J = \int_0^{\infty} t^k e^T(t) Q\, e(t)\, dt + r\, tr\left[L^T L\right]$$

$$r > 0, \quad Q > 0, \quad k \geq 0$$

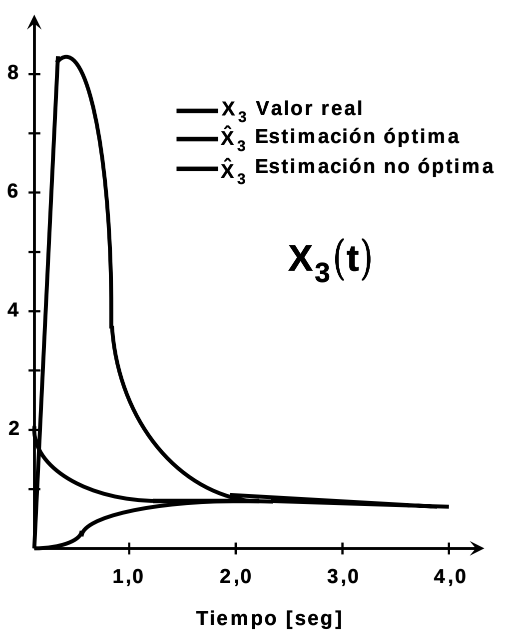
Mismo ejemplo anterior

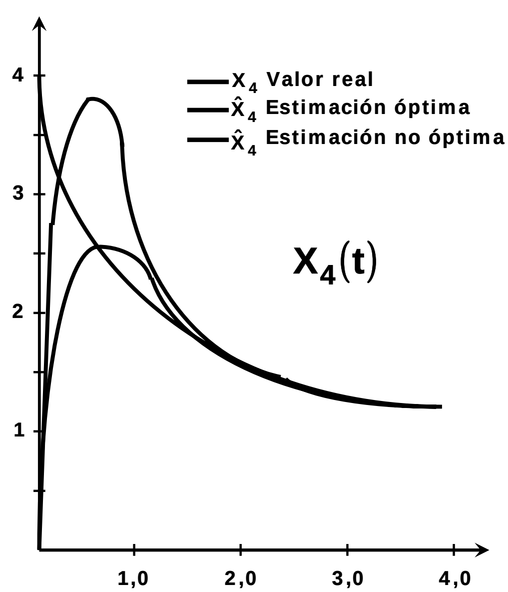
$$r = 0{,}00001 \qquad e(0) = [2 \quad 4]^T$$
$$Q = I \qquad s_1 = -4,\ s_2 = -5$$

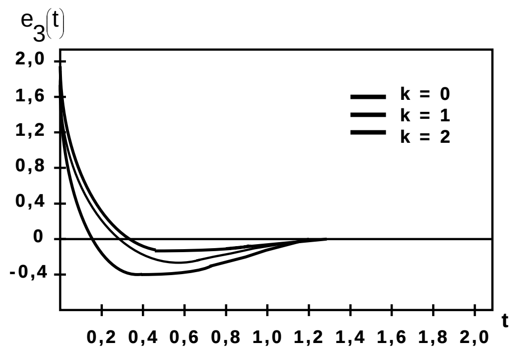
$$k = 0 \qquad L = \begin{bmatrix} 14{,}923 & -11{,}413 \\ 26{,}576 & -20{,}293 \end{bmatrix}$$

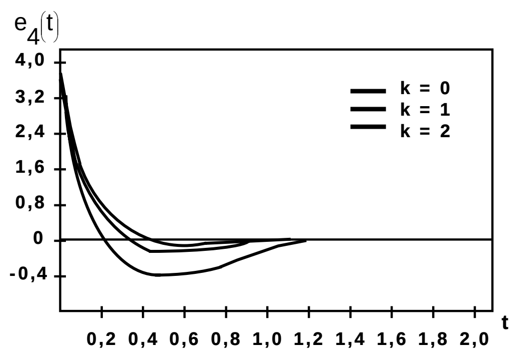
$$k = 1 \qquad L = \begin{bmatrix} 6{,}462 & -6{,}354 \\ 12{,}601 & -12{,}462 \end{bmatrix}$$

$$k = 2 \qquad L = \begin{bmatrix} 3{,}011 & -4{,}206 \\ 7{,}162 & -9{,}011 \end{bmatrix}$$









Principio de Separación

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$
$$Y(t) = CX(t)$$

(A, B) completamente controlable

$U(t) = -KX(t) + R$ **X(t): disponible**
R: referencia

$$\dot{X}(t) = (A - BK)X(t) + BR(t)$$

(A, B) c. c. $\Rightarrow$ $\exists$ K tal que A – BK posee los polos deseados.

$$U(t) = -K\hat{X}(t) + R(t)$$

(C, A) completamente observable

$$\dot{X}(t) = AX(t) - B\hat{X}(t) + BR(t)$$
$$e(t) \triangleq \hat{X}(t) - X(t)$$

$$\dot{X}(t) = (A - BK)X(t) - BKe(t) + Br(t)$$

$$\dot{e}(t) = (A - FC)e(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - FC \end{bmatrix}}_{E} \begin{bmatrix} X(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

$$S(E) = S(A - BK) \cup S(A - FC)$$

Principio de Separación