UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Astronomía

Curso EH28A
Prof. José Maza Sancho
17 Abril 2006

1.07. JOHANNES KEPLER

1.07.1. Introducción:

La reforma copernicana introdujo en la Astronomía del Renacimiento, un nuevo punto de vista para plantearse el antiguo problema de la estructura del mundo. Sin embargo, Copérnico fue muy conservador al aceptar fielmente como base axiomática de su sistema todos los conceptos que habían definido el sistema de Ptolomeo. En particular, adopta como postulado la idea de que todos los movimientos son circulares y uniformes. En ese sentido se puede decir que el sistema por él propuesto es una fiel solución del problema de Platón, que consiste en encontrar una representación de la estructura del mundo mediante movimientos circulares y uniformes. Por tanto, de Eudoxio a Copérnico, pasando por Hiparco y Ptolomeo, el hombre procuró formular una teoría del cosmos basándose en los mismos principios. Copérnico cambia el diseño básico del sistema ptolemaico, pero en la construcción de su nuevo sistema utiliza los mismos ladrillos y vigas maestras empleadas por Ptolomeo.

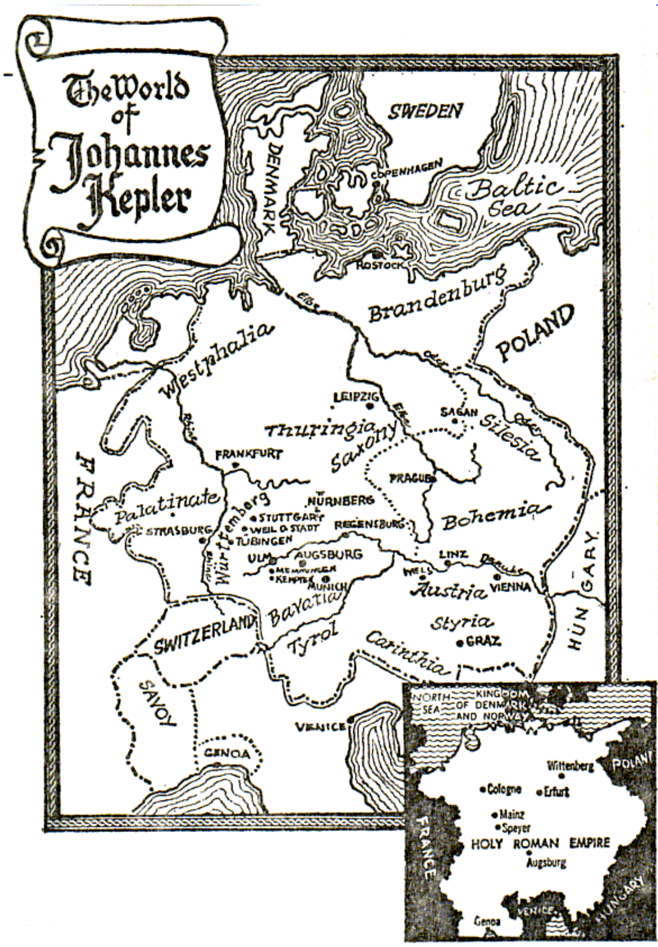
Con Kepler se consolida la revolución copernicana al introducir una nueva metodología en el problema. Kepler rompe con el dogma platónico, apoyado por pitagóricos y peripatéticos, desterrando círculos y esferas junto al movimiento uniforme, ideas que mantenían a la Astronomía en un terreno estéril. Se puede afirmar entonces que la obra de Kepler rompe con el pasado de un modo mucho más profundo que la de Copérnico. A eso habría que agregar, a fin de poder apreciar la importancia de Kepler, que Copérnico tuvo en Aristarco, Heráclides y otros, una guía para plantear el sistema heliocéntrico, pero Kepler no tuvo precursores de importancia. Nadie antes que él trato de construir un modelo del mundo sin utilizar esferas y círculos. Sólo podrían citarse las aisladas sugerencias de Brudzewski, profesor de Copérnico en Cracovia, que los deferentes de Mercurio y la Luna podrían ser ovales y la de Tycho acerca de las órbitas de los cometas.

1.07.2. Boceto biográfico:

Johannes Kepler nació el 27 de diciembre de 1571 en Weil (a veces llamado Weil-der-Stadt), en la parte sudoeste de Alemania, conocida como Swabia. Johannes fue el mayor de siete hijos de Henrich Kepler y Katherine Guldenmann que constituyeron una familia muy poco armónica dado el carácter irascible e inestable de ambos. Heinrich aparentemente nunca estudió ni aprendió oficio alguno, sirviendo sólo de mercenario en varios ejércitos. Katherine era también una mujer muy desordenada y extraña, que había sido criada por una tía que murió quemada en la hoguera acusada de brujería. En esas condiciones la niñez de Johannes fue amarga. A la falta de preocupación familiar se sumó la condición enfermiza de Johannes que le hizo sufrir varias enfermedades y un defecto visual de nacimiento (miopía más visión múltiple).

Cuando Johannes sólo tenía tres años, su padre se enroló en el ejército del Emperador que combatió a los protestantes en Holanda, acto de la mayor ignominia pues los Kepler eran una de las familias protestantes más antiguas de Weil. Un año más tarde su madre se fue con su padre quedando al cuidado de su abuelo Sebaldo, quien tampoco dispensó cuidado ni cariño por su nieto. Al año siguiente sus padres retornaron, pero para establecerse en una ciudad vecina a Weil, llamada Leonberg. Al poco tiempo su padre se fue como mercenario a Holanda. Volvió nuevamente, vendió la casa en Leonberg y puso una taberna en Ellmendingen en 1580. Posteriormente la familia retornó a Leonberg para luego, en el año 1588, el padre de Kepler desaparecer para siempre de la vista de su familia. Aparentemente se fue con la flota napolitana muriendo en lugar desconocido. Johannes sólo pudo asistir a la escuela en forma irregular, e incluso entre los 9 y los 11 años no fue a la escuela, pues fue puesto a realizar duras labores en el campo. También tuvo que atender en la taberna de sus padres. Por eso y pese a su talento que manifestara en forma precoz, le tomó el doble de lo usual completar su educación básica en latín.

El joven Kepler se destacó rápidamente en Adelberg y fue así como después de dos años fue trasladado al seminario de Maulbronn. Allí nuevamente Kepler se ganó la admiración de la mayoría de sus profesores por su especial capacidad. Sin embargo, era un joven poco comunicativo con sus compañeros y no hizo amigos en esos años. Además sufrió nuevamente de frecuentes enfermedades. Finalmente en septiembre de 1588 aprobó el examen de admisión a la famosa Universidad de Tubinga, foro de teología luterana. Allí nuevamente se destacó como excelente estudiante, obteniendo una beca para continuar sus estudios. En agosto de 1591 aprobó un examen general, obteniendo el segundo lugar entre 14 candidatos. En esos años en Tubinga, Kepler tuvo la suerte de conocer a Michael Maestlin, profesor de Matemáticas y Astronomía, veinte años mayor que él, y uno de los astrónomos más competentes de su época. Maestlin instruyó a Kepler en geometría euclidiana y trigonometría, dándose cuenta que tenía una extraordinaria habilidad en matemáticas. Maestlin, junto con explicarle el sistema de Ptolomeo, único aceptado por la Iglesia en ese entonces, le explicó también el sistema copernicano a un grupo de estudiantes interesados en Astronomía. Maestlin era un copernicano convencido y transmitió al joven Kepler ese punto de vista. Allí nació una profunda amistad entre estos dos hombres, que habría de durar muchos años (Kepler siempre le escribía a Maestlin con gran respeto, pese a que su fama personal habría de superar pronto a la de su propio maestro).



En 1594, cuando se encontraba muy próximo de terminar sus estudios teológicos para convertirse en Maestro Luterano, llegó a la universidad de Tubinga una petición del seminario de Graz en Estiria, Austria, de un profesor de matemáticas. Le ofrecieron el puesto a Kepler. Éste después de meditarlo decidió tomar el trabajo, a lo menos por un par de años, asegurándose que podía regresar a Tubinga luego a terminar sus estudios. Pese a su gran religiosidad tenía dudas teológicas con los luteranos que lo hacían algo embarazoso en la Universidad. Además el trabajo en el lejano pueblo de Graz era todo un desafío y Kepler decidió enfrentarlo. Llegó a Graz el 11 de abril de 1594. Él iba a enseñar en el seminario luterano de la ciudad que estaba regida por el Archiduque Carlos que era católico y su población era también mayoritariamente católica.

Kepler no era un buen profesor y sus estudiantes no estaban particularmente interesados en Matemáticas y Astronomía. El segundo año en Graz no se inscribió ningún alumno en matemáticas. Le pidieron que enseñara Latín, Retórica y otros temas, y lo hizo a plena satisfacción para sus superiores. Su puesto de matemático en Graz también incluía la obligación de confeccionar un calendario para el año siguiente, que consignara pronósticos astrológicos en una serie de materias como política, guerras, cosechas, etc. Por fortuna para Kepler, en su calendario para 1595 hizo una serie de predicciones que resultaron correctas, lo que le valió un gran prestigio en Graz, e incluso un aumento de sueldo. Durante 5 años continuó haciendo pronósticos por demandárselo su trabajo y además porque le daban entradas extras. Sus predicciones eran tan generales y ambiguas que era difícil que no resultaran correctas. Por ejemplo, en el calendario para 1598 escribió: *“Los cielos no pueden hacer demasiado para dañar al más poderoso de dos enemigos, ni ayudar mucho al más débil. Aquel que se fortalece a si mismo con buenos consejos, soldados, armas y valentía también pondrá al cielo de su parte…”* . Un consejo así es de una sabiduría indiscutible.

Lo más importante que hizo Kepler en esos 6 años en Graz, fue la publicación de su primer libro astronómico, el “*Mysterium Cosmographicum”*, impreso en 1596. Del contenido del libro hablaremos más adelante. Ahí se plasman sus primeras ideas astronómicas que habrían de guiarlo en sus búsquedas posteriores. Envía ejemplares de su libro a Galileo y a Tycho entre otros. Con Galileo empieza así una amistad duradera y Tycho reconoce en Kepler a un hábil e imaginativo matemático y lo invita a Praga a trabajar como su ayudante. Las cosas en Estiria no estaban bien para los protestantes, por lo cual Kepler decide aceptar el ofrecimiento de Tycho. El 1° de enero de 1600 Kepler partió a entrevistarse con Tycho en Praga. El 27 de abril de 1597 Kepler había contraído matrimonio con Bárbara Muller. El matrimonio duró 14 años hasta que Bárbara murió a los 37 años. Tuvieron 5 hijos, sólo dos de los cuales sobrevivieron. Bárbara no entendía en absoluto el trabajo y las motivaciones de su marido, por lo cual el matrimonio no parece haber sido muy afortunado.

Kepler estuvo unos meses en Praga con Tycho en 1600 sin lograr materializar una oferta de trabajo. Retornó a Graz donde estaba su familia. En agosto le exigieron cambiarse al catolicismo o abandonar Graz en un plazo de seis semanas. Kepler optó por lo último y se dirigió primero a Linz y luego a Praga con su familia, llegando allá en octubre de 1600. La relación entre Tycho y Kepler no fue buena. Ambos hombres tenían un carácter muy fuerte y en sus frecuentes choques fue siempre Kepler quien sacó la peor parte. *"En Praga todo es incierto, Tycho es un hombre con el cual no se puede vivir sin estar continuamente expuesto a crueles insultos"*. Con estas palabras describe Kepler su relación con Tycho. Kepler era sensitivo y soñador, Tycho duro e irascible; Kepler genio especulativo y observador miope mientras Tycho era un observador genial y en cambio un teórico miope.

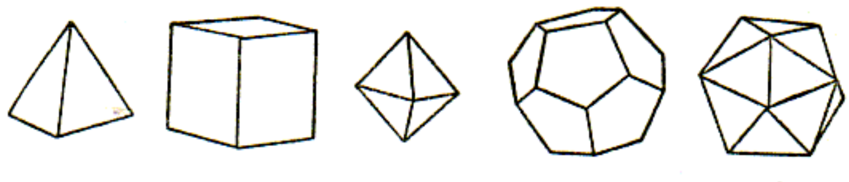
Al año de llegar Kepler a Praga muere Tycho Brahe con lo cual Kepler hereda el maravilloso caudal de observaciones de Tycho, y además el puesto de Matemático Imperial en Praga. Durante los siguientes 7 años de intensa labor Kepler resuelve el problema de la órbita de Marte, gracias a lo cual encuentra las dos primeras leyes del movimiento planetario. Las publica en 1609 en su libro *Astronomía Nova*. En 1611 muere su esposa y su hijo favorito, Frederick, de 6 años. En 1612 muere el Emperador Rodolfo II y con ello Kepler se ve forzado a abandonar Praga y se dirige a Linz, donde obtuvo una cátedra de matemáticas en la Universidad.

En Linz pasó Kepler los siguientes 14 años de su vida, y contrajo matrimonio por segunda vez en 1613 con Susana Reuttinger. En esa época publica su libro "*Harmonice Mundi",* en 1619, libro que contiene la tercera ley del movimiento planetario. Durante sus años en Linz vio alterada su vida por el proceso a su anciana madre, de 75 años, que fue acusada de brujería. Para salvarla de la hoguera Kepler debió trasladarse a Stuttgart, donde debió emplear toda su influencia.

El proceso a su madre debilitó su posición en Linz. La guerra de los 30 años trastornaba a Alemania y también a Austria, perturbando la vida de Kepler. Hacia fines de 1626 Kepler se dirige a Ulm con toda su familia. En 1627 publica allí las Tablas Rudolfinas, tablas que contienen efemérides astronómicas basadas en las observaciones de Tycho y con la forma correcta de las fórmulas calculadas en base a las leyes encontradas por Kepler. Hacia fines de 1627 vuelve a Praga donde el nuevo Emperador le hace una oferta a condición que se convierta al catolicismo. Kepler no acepta. Finalmente se dirige al pueblo de Sagan en Silesia, a trabajar bajo el tutelaje del general Wallenstein. Desgraciadamente Wallenstein no tiene dinero y lo que quería era un astrólogo. Finalmente Kepler acepta una cátedra en Rostock. En 1630, cuando se dirige a tomar su nuevo trabajo se detiene en Regensburg, donde se reúne la Dieta Imperial para reclamar el sueldo que se le adeudaba desde hacía bastante tiempo. Allí, abrumado y cansado del viaje contrae neumonía y muere, lejos de los suyos, el 15 de noviembre de 1630.

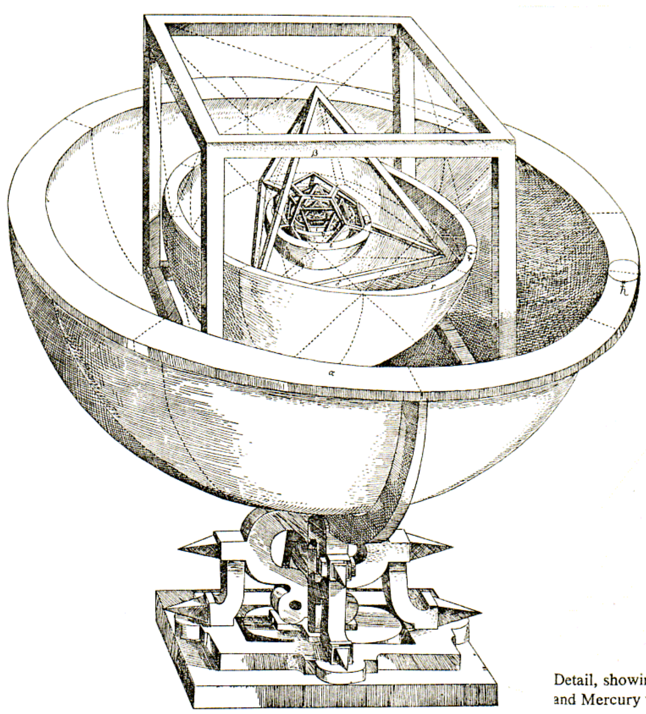
1.07.3. Mysterium Cosmographicum:

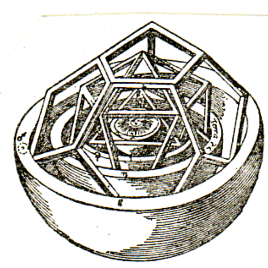
A los 25 años Kepler publica su primer trabajo astronómico, el libro titulado: *Prodromus Dissertationum cosmographicarum, continens Mysterium Cosmographicum*, que aparece finalmente en la primavera de 1597. En el Kepler se declara abiertamente copernicano y da buenas razones para mantener ese sistema. Mediante dos instructivos diagramas muestra que los epiciclos de Ptolomeo para los planetas exteriores se ven bajo el mismo ángulo que la órbita de la Tierra desde un punto de la órbita de cada uno de ellos, y muestra como se explica porque Marte tiene un gran epiciclo, mientras Júpiter y Saturno tienen epiciclo progresivamente menores. También señala que Ptolomeo no podía explicar el curioso hecho que los planetas en la oposición al Sol estuviesen también en el perigeo de sus epiciclos.



Cinco poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

La idea central que Kepler desarrolla en su libro se inspira en la visión pitagórica que Dios, supremo geómetra, ha creado el mundo conforme a una armonía preestablecida. Busca una armonía aritmética en el cosmos pero fracasa en su intento. Luego recurre a armonía geométrica usando polígonos inscribiendo y circunscribiendo círculos, pero no logra encontrar una relación que le sea satisfactoria. Finalmente llega a los poliedros. Euclides había demostrado que sólo existían 5 poliedros regulares. Los 6 planetas dejan 5 espacios entre ellos que pueden ser llenados por los 5 poliedros regulares. Esa coincidencia numérica no puede ser casual, según Kepler. Debe ser la clave del sistema del mundo. El problema es conocer el orden de intercalación de los polígonos.





Detail, showing the spheres of Mars, Earth, Venus and Mercury with the Sun in the centre.

La solución a la que llegó Kepler es la siguiente: a la esfera de Saturno inscribe un cubo, dentro del cual inscribe la esfera de Júpiter. En ella inscribe un tetraedro y en el esfera de Marte. A su vez en la esfera de Marte inscribe un dodecaedro y en ella la esfera de la Tierra. A esta inscribe un icosaedro y en el la esfera de Venus. Finalmente en la esfera de Venus inscribe un octaedro y en el la esfera correspondiente a Mercurio.

Kepler sobrestima el valor de su descubrimiento aparente. Escribe: *"No renunciaría a la gloria de mi descubrimiento aunque me regalaran el Electorado de Sajonia"*. Sin embargo, su modelo concuerda con los valores de las distancias en forma sólo muy aproximada. Kepler cree que calculando el mejor modelo posible del cosmos en base a observaciones planetarias, él podrá demostrar la coincidencia con su modelo.

A pesar que está claro que este libro de Kepler y su modelo de los 5 sólidos perfectos no tiene ningún asidero, le sirvió de inspiración para emprender el trabajo y esfuerzo monumental que lo llevarán a encontrar las leyes del movimiento planetario. El *Mysterium* también contiene un germen de sus descubrimientos posteriores. Kepler se pregunta en él que si el *"alma motriz"* del Sol no obra con mayor fuerza sobre los planetas más próximos, y si el movimiento no estaría distribuido por el Sol como este distribuye la luz. Kepler supone que el "alma motriz" del Sol sólo actúa en el plano de la órbita y que la velocidad de los planetas decrece con la distancia que los separa del Sol; por otra parte los diámetros de las órbitas crecen con esa distancia. De allí Kepler creía poder deducir la siguiente ley: los radios de las órbitas de los planetas están entre sí como el período del planeta más próximo al Sol a la semisuma de los dos períodos.

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{2T_1}{T_1 + T_2}$$

R2 > R1

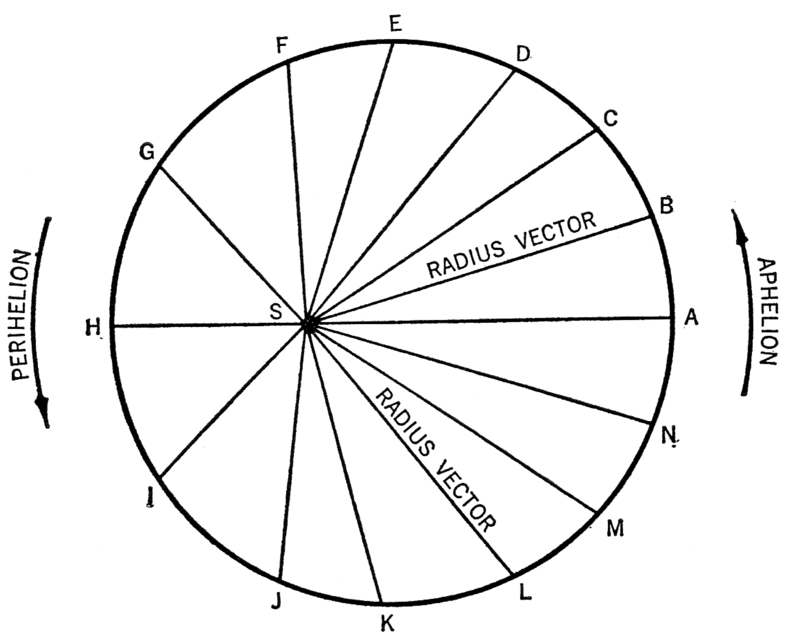
Kepler admite la existencia de una relación entre los períodos y los radios. Sólo 22 años más tarde encontrará la expresión correcta en su tercera ley. Con la idea de demostrar que su modelo es correcto y sabiendo que Tycho Brahe guarda consigo las mejores observaciones de los planetas, es que Kepler se dirige a Praga para colaborar con el gran astrónomo danés. Pretende recalcular las dimensiones de las órbitas para mejorar el acuerdo con su modelo.

1.07.4. Astronomía Nova:

El trabajo más importante que Kepler abordó en Praga a partir de su llegada, fue el análisis de las observaciones astronómicas de Tycho Brahe. Eligió al planeta de Marte por ser el más difícil y sobre el cual Tycho había realizado muchas observaciones. Esta elección fue muy afortunada pues Marte presenta una órbita más excéntrica que Júpiter, Saturno y Venus. Kepler era un pensador notablemente original, por lo cual empieza de inmediato a probar diversas hipótesis sobre el movimiento de Marte. Por ejemplo Copérnico había descartado el punto ecuante de Ptolomeo, haciendo que la velocidad angular del planeta fuese constante con respecto al centro del círculo, que no coincidía con el Sol. Kepler se da cuenta que los movimientos quedan mejor representados si el centro del círculo es colocado a mitad de camino entre el Sol y el punto ecuante.

Kepler procede a continuación a determinar la longitud elíptica de la oposición de Marte para 1582 y encuentra una discrepancia de 8 minutos de arco entre la observación de Tycho y su teoría matemática. *“Es imposible - escribe Kepler - que Tycho cometiera un error de observación equivalente a 8’; debemos agradecer a la bondad de Dios que nos diera en Tycho un observador eminente, y buscar el origen de las discrepancias en nuestras hipótesis iniciales. Esos 8 minutos, que no tenemos el derecho de descuidar, nos brindarán el medio de reformar toda la Astronomía”*. A partir de ese momento Kepler inicia una ruta absolutamente inexplorada, en la cual llegó a mostrar todo su genio.

En primer lugar Kepler cuestiona por así decirlo la física del punto ecuante. Le parece que es el "alma motriz" del Sol lo que mantiene el movimiento del planeta en su órbita. Al aumentar la distancia debe ser menor. Encuentra que para las ápsides de Marte (perihelio y afelio) la velocidad es inversamente proporcional a la distancia al Sol. De ahí concluye que el radio vector que une al Sol y a Marte barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta relación que se convertiría en su segunda ley fue lo primero que encontró. Elimina así el punto ecuante.



Kepler’s Second Law as Applied to a Circle

An eccentric circle supposed to be divided into equal areas. A planet traveling from A to B at aphelion would move more slowly than one traveling from G to H at perihelion. But it would sweep over equal areas (ABS and GHS) in equal times.

Ley de las áreas de Kepler aplicada a una órbita circular excéntrica.

Con esto mejora el acuerdo entre teoría y observaciones, pero no lo suficiente para descansar ahí. Kepler, en su lenguaje metafórico habitual describe esta etapa con las siguientes palabras: *“Cuando yo creía haber triunfado sobre Marte y estaba preparando al vencido su prisión en la forma de tablas con grillos construidos por círculos excéntricos, se reveló que la victoria era ilusoria y que una nueva guerra nos amenazaba tan violentamente como antes. En efecto, el enemigo había roto las cadenas que lo sujetaban mediante ecuaciones y logró evadirse de su prisión de tablas”*.

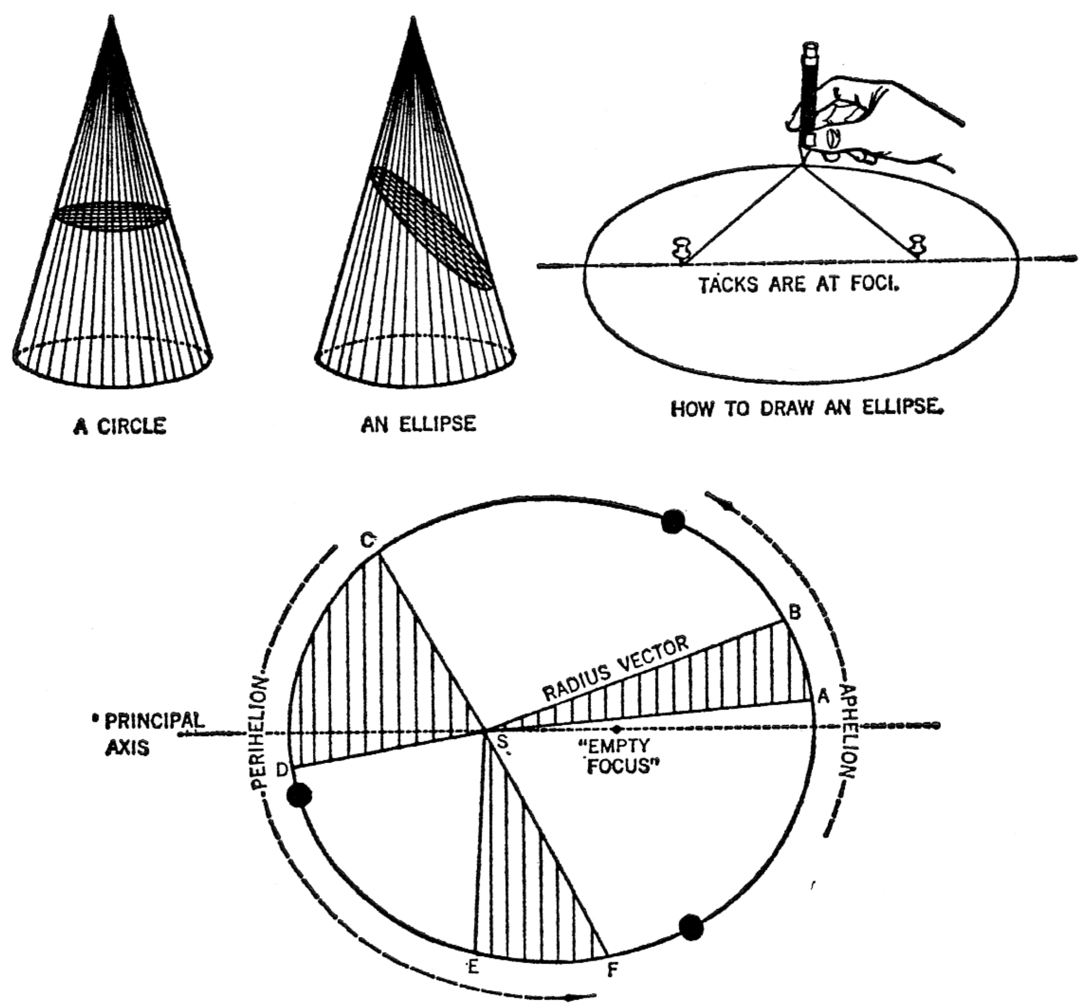
En el modo como Kepler enfrenta el problema se muestra su gran originalidad. En el triángulo Sol-Tierra-Marte, tomando observaciones separadas 687 días, él sabe que Marte ha vuelto a ocupar el mismo punto en su órbita y es el cambio de posición de la Tierra lo que determina el lugar del cielo donde el observará al planeta Marte. Como conoce de las observaciones del Sol la posición que éste ocupaba en ese momento, puede calcular la órbita de la Tierra con ese procedimiento. Una vez conocida la excentricidad de la órbita terrestre (que él supone circular) invierte el problema y ahora toma observaciones de Marte separadas por un año en cuyo caso es la Tierra la que estará en el mismo punto y Marte cambiará su posición. Con eso determina la distancia Sol-Marte en función de la distancia Sol-Tierra. Así encuentra que la órbita de Marte es simétrica con respecto a la línea de las ápsides pero el diámetro en sentido perpendicular a ella debe ser menor que la distancia entre el perihelio y el afelio. Por lo tanto la órbita debe ser ovalada y además simétrica con respecto a la línea de las ápsides.

Kepler había roto en ese punto con una tradición dos veces milenaria en Astronomía. Las órbitas planetarias no eran circulares sino ovaladas. El problema es saber que clase de curva es la descrita por el planeta. Ensaya distintas clases de óvalos, en particular curvas como la sección de un huevo al ser intersectado por un plano que pasa por su eje. No logra con ellas hacer cumplir la ley de las áreas. Allí advierte que la compresión lateral de la órbita (0.00429) corresponde numéricamente a la mitad del cuadrado de la excentricidad que él encontró (0.0926) ya que 0,0926*0,0926=0.00859. "Esto fue - dice Kepler - como si hubiese despertado de un sueño y visto una nueva luz". En efecto, una elipse casi circular tiene la propiedad que la razón entre sus diámetros menor y mayor difiera de la unidad en una cantidad igual a la mitad del cuadrado de su excentricidad. Por lo tanto la órbita de Marte debía ser una elipse con el Sol en uno de sus focos.

Finalmente en 1609 publica su libro *Astronomía Nova*, donde presenta las dos primeras leyes del movimiento planetario:

Primera ley: Las órbitas de los planetas son planas. El Sol está en el plano de la órbita. La trayectoria es una elipse de la cual el Sol ocupa uno de sus focos.

Segunda ley: El radio vector que une al Sol y al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.



KEPLER'S FIRST AND SECOND LAWS

Above, conic sections showing how the circle and ellipse are obtained. Below, the Second Law governing orbital speed of a planet. According to the First Law, the sun (S) is at one focus of the ellipse. Radius vectors from the sun to points on the orbit are drawn so that the three shaded portions are equal in area. Because the areas are the same, a planet must move through the orbital arcs AB, CD and EF in equal times. At perihelion (nearest the sun), the planet has to move faster than it does at aphelion in order for its radius vector to sweep over the corresponding equal area.

Con las leyes de Kepler desaparecen definitivamente de la Astronomía los deferentes, epiciclos, puntos ecuantes, etc. Bastan 7 elipses para explicar los movimientos en el sistema solar, de la Luna, y los seis planetas. Como comparación recordemos que Copérnico necesitaba de 34 círculos para describirlo.

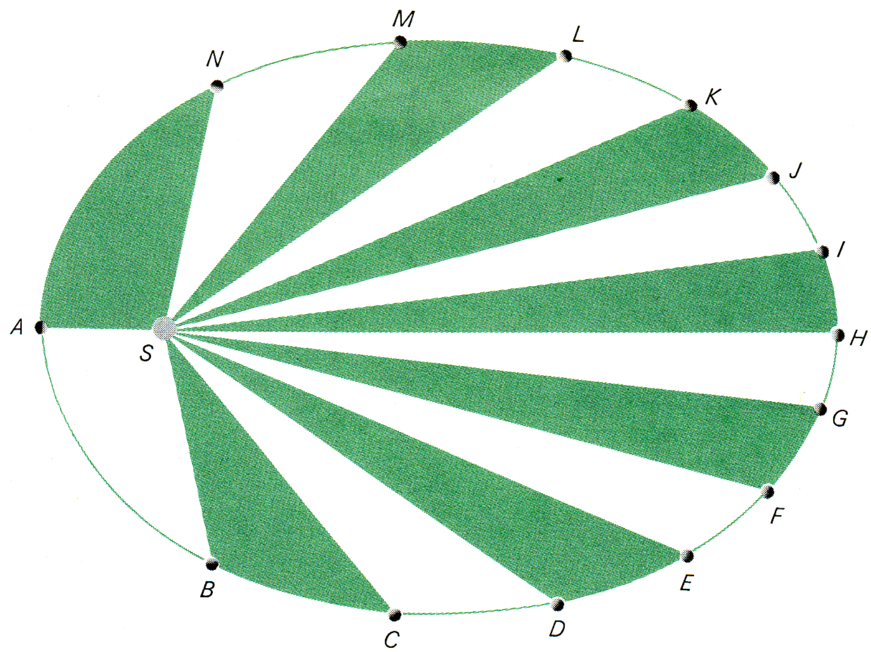


FIGURE 3.11 Law of equal areas. A planet moves most rapidly on its elliptical orbit when it is at position *A*, nearest the focus of the ellipse, *S*, where the sun is. The planet's orbital speed varies in such a way that in equal intervals of time it moves distances *AB, BC, CD,* and so on, so that regions swept out by the line connecting it and the sun (shaded and clear zones) are always the same in area.

Ley de las áreas en una órbita elíptica.

Kepler en su libro *"Epitome Astronomiae Copernicanae"* (1618-1621), extiende al resto de los planetas la validez de sus leyes y muestra que también se aplican a la Luna y los satélites galileanos de Júpiter.

1.07.5. Harmonices Mundi:

Kepler no se dio por satisfecho con sus dos primeras leyes del movimiento planetario. Siguió buscando una relación armónica entre las distintas órbitas que venía buscando desde 1597 en su *Mysterium Cosmographicum*, que relacionara las distancias y los períodos de revolución en torno del Sol. Ensayó relaciones como las que ya había propuesto en 1597, pero las fue descartando una a una. Finalmente el 15 de mayo de 1618 formula la feliz hipótesis: *"Los cuadrados de los tiempos de revolución son proporcionales a los cubos de los semi-ejes mayores de las órbitas"*. Esto lo expresa matemáticamente como:

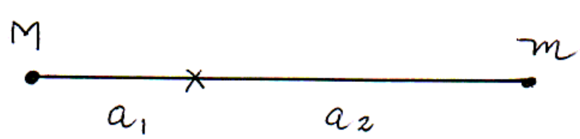
$$\frac{P_1^2}{P_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Esta proporcionalidad entre los cuadrados de los períodos y los cubos de los semi-ejes mayores se pueden ver en la tabla siguiente donde los períodos de revolución de los planetas se expresan en años y los semi-ejes mayores en términos del semi-eje mayor de la órbita terrestre que se define como la *Unidad Astronómica de distancia* (1U.A.=150.000.000 Km.).

Planeta	a	p	a^3	p^2
Mercurio	0.3871	0.24085	0.0580	0.0580
Venus	0.7233	0.61521	0.3784	0.3785
Tierra	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
Marte	1.5237	1.88089	3.5375	3.5377
Júpiter	5.2028	11.86223	140.8350	140.7130
Saturno	9.5388	29.45770	867.9230	867.7560

El descubrimiento de la tercera ley regocijó a Kepler más que ninguno de sus importantes éxitos anteriores. En el prólogo de su libro "*Harmonice Mundi*", publicado en 1619, escribe: *"Hace 18 meses he visto el primer rayo de luz, hace tres meses he visto el alba, y por último hace pocos días el Sol, más radiante que nunca, se mostró sin velos ante mis ojos … mi libro será leído por la gentes de hoy o por la posteridad. ¿Acaso Dios no esperó 6.000 años al interprete de sus obras?"*.

La tercera ley de Kepler es en verdad una aproximación a la ley real. Esta se puede deducir a partir de la ley universal de gravitación de Newton de la siguiente manera. Si un planeta de masa m gira entorno al Sol, de masa M, en una órbita circular tendremos que en verdad el planeta gira en torno al centro de masas del sistema Sol-planeta, e igual ocurre con el Sol. Si llamamos a1 a la distancia del Sol al centro de masas y a2 la distancia del planeta al centro de masa, tenemos que:



$a_1 + a_2 = a$

$M\, a_1 = m\, a_2$

la fuerza centrífuga del giro de cada uno debe estar perfectamente compensado por la atracción gravitacional del otro. Por lo tanto:

$$\frac{Mv_1^2}{a_1} = G\frac{Mm}{a^2}$$

$$\frac{mv_2^2}{a_2} = G\frac{Mm}{a^2}$$

pero

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}$$

$$v_2 = \frac{2\pi a_2}{P}$$

por lo tanto las ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

$$\frac{4\pi^2 a_1}{P^2} = G\frac{m}{a^2}$$

$$\frac{4\pi^2 a_2}{P^2} = G\frac{M}{a^2}$$

sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{4\pi^2}{P^2}(a_1 + a_2) = \frac{G}{a^2}(M + m)$$

Pero: $a_1 + a_2 = a$; por lo tanto:

$$4\pi^2 a^3 = G(M + m)P^2$$

Esta es la forma de la **Tercera Ley de Kepler Modificada.**

Si esta ecuación para un planeta y el Sol la dividimos por la misma ecuación para el sol y la Tierra, tenemos: .

$$\left(\frac{a_P}{a_\oplus}\right)^3 = \left(\frac{M_S + m_P}{M_S + m_\oplus}\right)\cdot\left(\frac{P_P}{P_\oplus}\right)^2$$

donde a_P : semi-eje mayor del planeta
$a_\oplus$: semi-eje mayor de la Tierra
M_s : masa del Sol
m_p : masa del planeta
$m_\oplus$: masa de la Tierra
P_P : período del planeta
$P_\oplus$: período de la Tierra

Como las masas de los planetas son muy pequeñas comparadas con la masa del Sol, el primer paréntesis del segundo miembro es casi igual a la unidad. Sólo la masa de Júpiter, la mayor de un planeta, llega a 0,001 de la masa solar. La tercera ley de Kepler, en su formulación completa con las masas, se utiliza en Astronomía como el instrumento fundamental para obtener las masas de los planetas y de las estrellas binarias.

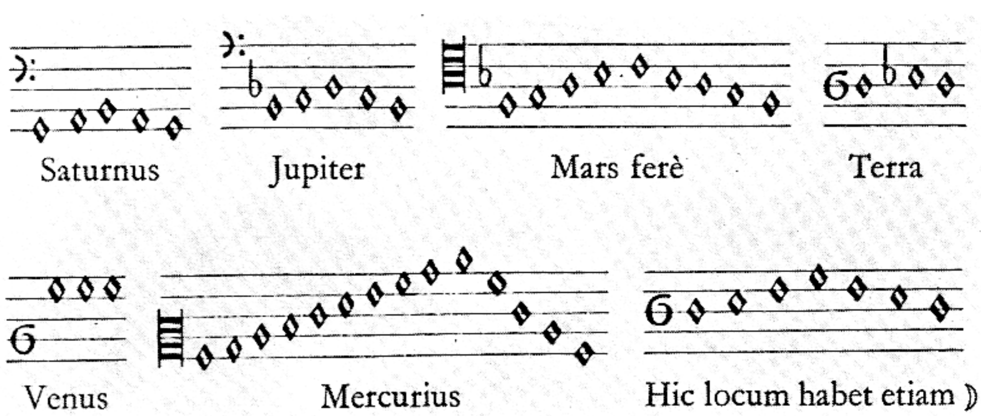


FIGURE 3.13 Notes written by Kepler, representing the music "sung" by the planets (from his *Harmony of the Worlds*).

Soñador y místico, Kepler representa una rara mezcla de pensamiento medieval y renacentista. En el capítulo III del libro V de su obra Harmonices Mundi se encuentra su tercera ley. El resto del libro contiene gruesas especulaciones místicas sobre la armonía del universo. Dedica por ejemplo, extensas consideraciones al alma de la Tierra. Desarrolla la idea pitagórica de las relaciones entre distancias y notas musicales, llevando al pentagrama la "música" de cada planeta. Junto con Tycho Brahe, Kepler es uno de los astrónomos célebres que más tiempo dedicó a especulaciones astrológicas.

Publica finalmente en 1627 las Tablas Rudolfinas de los movimientos planetarios, efemérides astronómicas basadas en las observaciones realizadas por Tycho Brahe, utilizando el sistema algorítmico desarrollado por él. Este trabajo lo había iniciado en 1600 en Praga, bajo el tutelaje de Rodolfo II.

Kepler junto con deducir sus leyes del movimiento planetario entrevió varias características del sistema solar, como que el Sol posee la mayor masa del sistema solar, superior al conjunto de todos los planetas, y está rodeado de una extensa *"atmósfera"*. Adivinó que Marte posee dos satélites, basado en un razonamiento de corte pitagórico, pues la Tierra tiene 1 y Júpiter 4, por tanto Marte, ubicado entre ellos, "debería" tener 2. Atribuye a la Luna una constitución similar a la terrestre y además la indica como la causa de las mareas. Señala que la cola de los cometas apunta siempre en dirección contraria al Sol.

El carácter esotérico de las obras de Kepler lo hizo ser poco conocido (o mejor lo hizo poco reconocido) en su tiempo. Ni Galileo ni Newton lo mencionan en sus obras, a pesar que el trabajo de Kepler lo conocían ambos y era muy importante para lo que ellos hicieron. Recién el siglo XIX vino a reparar la injusticia histórica ocurrida con Kepler. El gran astrónomo francés de la primera mitad del siglo XIX, Francisco Arago, escribió: *"La gloria de Kepler esta escrita en los cielos y ningún progreso de la ciencia puede oscurecerla. Los planetas en la sempiterna sucesión de sus movimientos lo proclamarán siglo tras siglo"*.

Problema 1:
Calcular la razón entre la masa del Sol y la masa de la Tierra, sabiendo que la masa de la luna es 1/81 de la masa terrestre.

Solución:

La tercera ley de Kepler para el movimiento de la Tierra alrededor del Sol se puede escribir como:

$$4\pi^2\left(150\times10^6\right)^3 = G\left(M_{Sol}+m_T\right)\left(365{,}25\right)^2$$

La tercera ley de Kepler para el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra se puede escribir como:

$$4\pi^2\left(384.000\right)^3 = G\left(M_{Tierra}+m_{Luna}\right)\left(27{,}3\right)^2$$

Dividiendo ambas ecuaciones resulta:

$$59{,}6\times10^{6} = \frac{M_{Sol}}{m_{T}\left(1+\frac{1}{81}\right)}\times179{,}0$$

Por lo tanto:

$$\frac{M_{Sol}}{m_{Tierra}} = 337.000$$

Júpiter es el más masivo de los planetas, mas de 300 veces más masivo que la Tierra pero su masa apenas alcanza a un milésimko de la masa solar.

Problema 2:
Calcular la altura sobre la Tierra de un satélite geoestacionario.

Solución:

La tercera ley de Kepler para el giro de la Luna alrededor de la Tierra es:

$$4\pi^{2}(384.000)^{3} = G(M_{Tierra} + m_{Luna})(27)^{2}$$

La tercera ley de Kepler para el giro del satélite alrededor de la Tierra es:

$$4\pi^{2}x^{3} = G(M_{Tierra} + m_{Satélite})(1)^{2}$$

Dividiendo ambas ecuaciones resulta:

$$\left(\frac{384.000}{x}\right)^{3} \approx \left(\frac{27}{1}\right)^{2}$$

de donde

$$\frac{384.000}{x} \approx \left(\frac{3}{1}\right)^{2} = 9$$

Por lo tanto:

$$x = \frac{384.000}{9} = 42.670$$

Esa es la distancia desde el centro de la Tierra al satélite. Para saber la altura hay que restar el radio terrestre, 6.378 kilómetros por lo cual la respuesta es que la altura sobre la superficie terrestre de un satélite geoestacionario es 36.292 o sea 36.300 kilómetros. (La distancia al centro equivale a 6,7 radios terrestres; la altura, a 5,7).

BIBLIOGRAFÍA:

D. Papp y J. Babini: "Panorama General de Historia de la Ciencia", vol.VI, Espasa -Calpe, B. Aires, 1952.
A. Koestler: "The Sleepwalker", Penguin, 1973
Knight: "Johannes Kepler", Franklin Watts. Inc., N. York,1962
A. Pannekoek: "A History of Astronomy", Interscience Pub.,N. York, 1961