

CI66J

**CI66J/CI71T
MODELACION NUMERICA DE AGUAS
SUBTERRANEAS**

**TEMA 2
AGUA SUBTERRANEA Y ACUIFEROS
OTOÑO 2006**



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL



CI66J

PROPIEDADES DE UN SUELO
CARGA HIDRAULICA TOTAL Y POTENCIAL
PIEZOMETRICO
LEY DE DARCY
PROPIEDADES DE UN ACUIFERO
CONSERVACION DE MASA PARA FLUJO EN
UN MEDIO POROSO



CI66J

POROSIDAD TOTAL Y EFECTIVA

Al momento en que son formadas, algunas rocas contienen espacios vacíos mientras que otras son completamente sólidas.

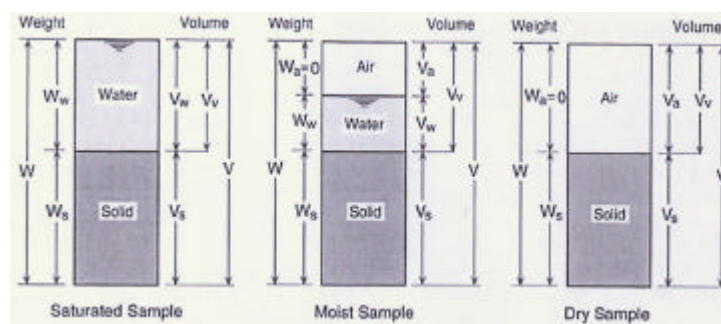
Aquellas rocas que ocurren cerca de la superficie de la tierra no son totalmente sólidas debido a los procesos físicos y químicos producidos por cambios climáticos. Estos procesos causan la descomposición de las rocas, lo que se traduce en un aumento de los espacios vacíos.

Los espacios vacíos o poros entre los granos del suelo dan origen a la **porosidad**. Las fracturas, espacios vacíos y los poros en los materiales de la tierra son de gran importancia para la hidrogeología ya que el agua subterránea y la humedad del suelo ocurren en ellos.



CI66J

POROSIDAD TOTAL Y EFECTIVA



$$q = \frac{V_w}{V_s + V_w + V_a}$$



CI66J

POROSIDAD TOTAL Y EFECTIVA

Porosidad Total, n , es el porcentaje de la roca o suelo que está compuesto de huecos o vacíos

$$n = 100 \cdot \frac{V_v}{V_v + V_s} = 100 \cdot \frac{V_v}{V_T}$$

La **Razón de Vacíos**, e , es un parámetro relacionado con el anterior:

$$e = 100 \cdot \frac{V_v}{V_s}$$

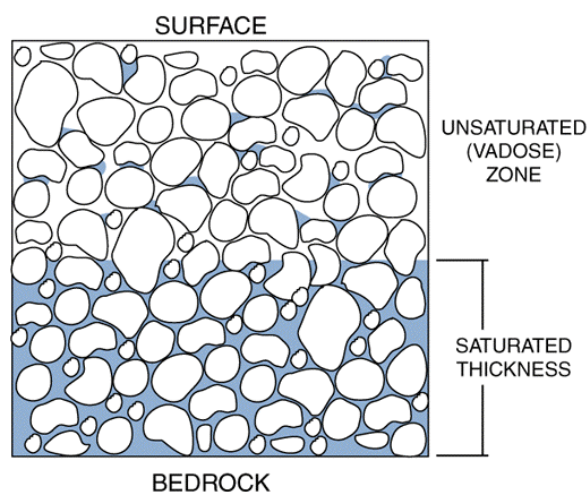
Porosidad Efectiva, n_e , corresponde a aquellos huecos que se encuentran interconectados entre sí.

$$n_e < n$$



CI66J

POROSIDAD TOTAL Y EFECTIVA



CI66J

POROSIDAD TOTAL Y EFECTIVA

Rango de Valores de Porosidad, n(%)

	n(%)
Depósitos no consolidados	
Grava	24-40
Arena	25-50
Limo	25-50
Arcilla	40-70
Rocas	
Basalto fracturado	5-50
Limo kárstico	5-50
Dolomita	0-20
Roca cristalizada fracturada	0-10
Roca cristalina densa	0-5



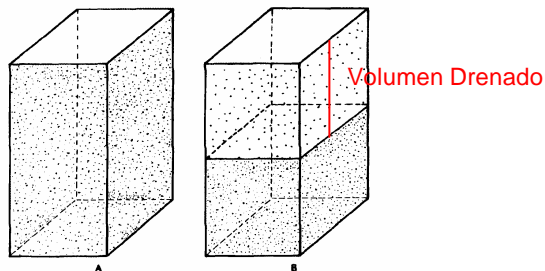
CI66J

CAPACIDAD Y RETENCION ESPECIFICA

La **capacidad específica** (S_Y) es la razón entre el volumen de agua que drena desde una muestra de suelo saturado debido a la acción de la gravedad y el volumen total de la muestra. Su complemento es la **retención específica** (S_R).

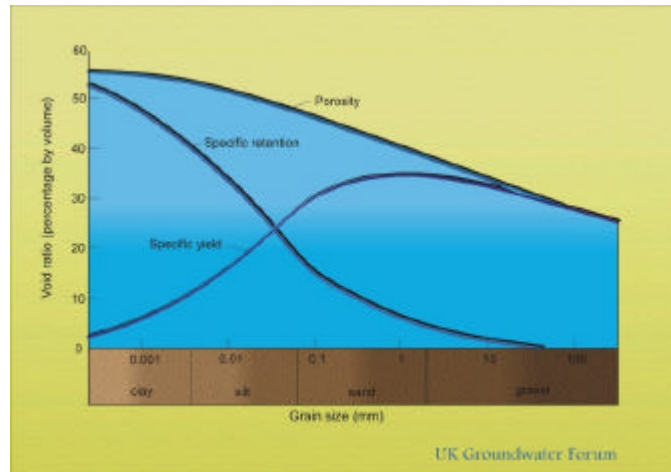
$$S_Y = \frac{V_{DRENADO}}{V_{TOTAL}}$$

$$n = S_Y + S_R$$



CI66J

CAPACIDAD Y RETENCION ESPECIFICA



CI66J

PROPIEDADES DE UN SUELO

CARGA HIDRAULICA TOTAL Y POTENCIAL
PIEZOMETRICO

LEY DE DARCY

PROPIEDADES DE UN ACUIFERO

CONSERVACION DE MASA PARA FLUJO EN
UN MEDIO POROSO

CI66J

CARGA HIDRAULICA TOTAL Y POTENCIAL PIEZOMETRICO

El proceso físico que involucra el flujo a través de un medio poroso usualmente requiere la existencia de un **gradiente o diferencia de potencial**. En el caso del escurrimiento a través de un medio poroso bajo condiciones saturadas o no saturadas se requiere que exista una diferencia de energía entre dos puntos en el medio para que se produzca un flujo neto de agua entre ellos.

El **nivel de energía**, como altura o columna de agua, está compuesto de tres términos: h_v altura de velocidad, h_p altura de presión y h_z altura o cota geométrica.

$$h_T = h_v + h_p + h_z$$

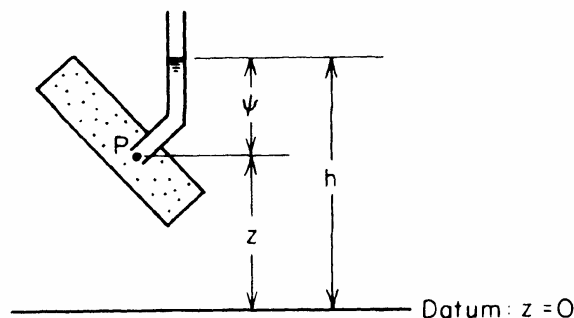
$$h_T = \frac{v^2}{2 \cdot g} + \frac{p}{\rho \cdot g} + z \approx \frac{p}{\rho \cdot g} + z = y + z$$



CI66J

CARGA HIDRAULICA TOTAL Y POTENCIAL PIEZOMETRICO

$$p = \rho g(h - z) + p_0$$

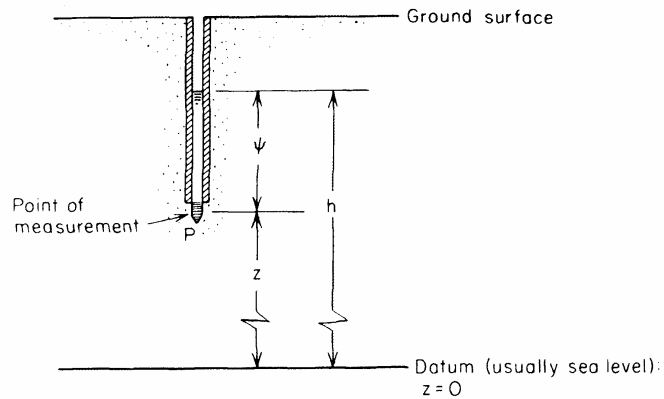


Medición de altura piezométrica en el punto P, en un piezómetro de laboratorio.



CI66J

CARGA HIDRAULICA TOTAL Y POTENCIAL PIEZOMETRICO



Medición de altura piezométrica en el punto P, en un piezómetro o sondaje de observación en terreno.

CI66J

PROPIEDADES DE UN SUELO CARGA HIDRAULICA TOTAL Y POTENCIAL PIEZOMETRICO

LEY DE DARCY

PROPIEDADES DE UN ACUIFERO CONSERVACION DE MASA PARA FLUJO EN UN MEDIO POROSO



CI66J

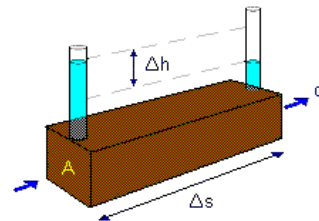
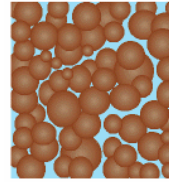
LEY DE DARCY

Darcy encontró que la tasa o velocidad (q) a la cual el agua fluye a través del medio poroso es directamente proporcional a la diferencia de altura entre los dos extremos del lecho filtrante, e inversamente proporcional a la longitud del lecho.

$$q \propto \Delta h = h_A - h_B$$

$$q \propto 1/L$$

$$q \propto \frac{\Delta h}{L} = \frac{h_A - h_B}{L}$$



CI66J

LEY DE DARCY

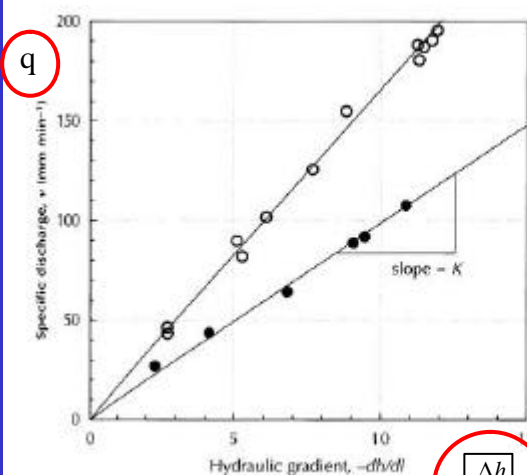


FIGURE 3.13

Original data from Darcy's 1856 experiments that show a linear relationship between specific discharge and hydraulic gradient for two different sands. Source: Hornberger, Raffensperger, Wiberg and Eshleman, Elements of Physical Hydrology. © 1998, The Johns Hopkins University Press. Used with Permission.



CI66J

CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA O COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD, K

Hubbert (1956) mostró que la constante de proporcionalidad de Darcy, K , es una función de propiedades del medio poroso y el fluido que pasa a través de él.

$$K = k \cdot \frac{r \cdot g}{\mu}$$

donde k es la permeabilidad intrínseca del suelo la cual tiene unidades de área, l^2 (darcy). En la última expresión ρ es la densidad del fluido, g es la aceleración de gravedad, y μ es la viscosidad dinámica del fluido.

$$1 \text{ darcy} = \frac{\frac{1 \text{ cP} \cdot 1 \text{ cm}^3 / \text{s}}{1 \text{ cm}^2}}{1 \text{ atm} / 1 \text{ cm}} = 9.87 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^2$$

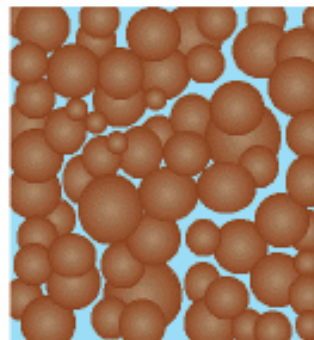


CI66J

DESCARGA ESPECIFICA VERSUS VELOCIDAD DE POROS

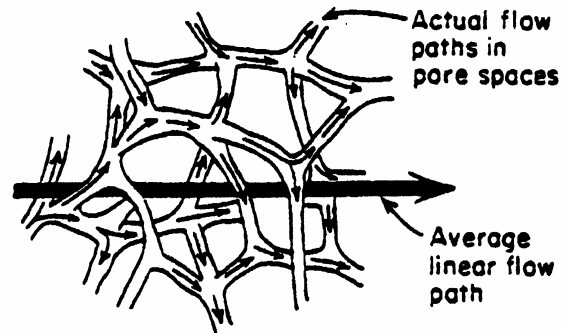
La ley de Darcy proporciona una estimación de la velocidad del agua subterránea, la que comúnmente se conoce como **descarga específica**, la que corresponde al caudal que circula a través del medio poroso permeable dividido por el área total expuesta o perpendicular al escurrimiento.

La **velocidad real** del agua a través de los poros del acuífero es la que corresponde al paso del agua por un área de escurrimiento dada por la porosidad del material.



CI66J

DESCARGA ESPECIFICA VERSUS VELOCIDAD DE POROS



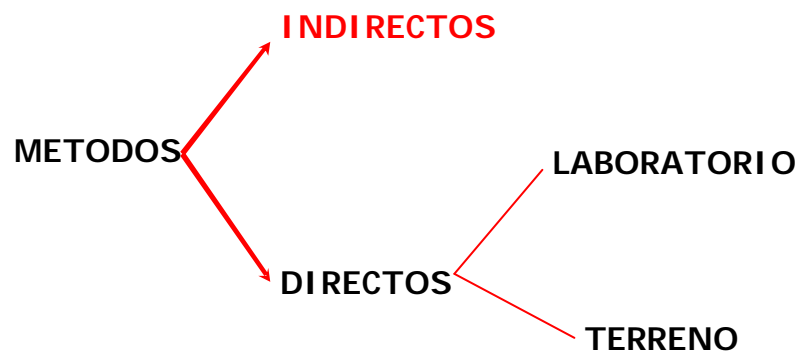
La **velocidad real** del agua a través de los poros del acuífero quedará dada por la siguiente expresión:

$$v_R = \frac{K \cdot i}{n} = \frac{v_{DARCY}}{n}$$



CI66J

METODOS PARA CALCULAR CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA



CI66J

MÉTODOS INDIRECTOS PARA CALCULAR K

Rangos de Permeabilidad y Conductividad Hidráulica para Sedimentos no Consolidados

Material	Permeabilidad Intrínseca k_i , darcys	Conductividad Hidráulica K , cm/s
Arcilla	$10^{-6} - 10^{-3}$	$10^{-9} - 10^{-6}$
Limo, limos arenosos, arenas arcillosas	$10^{-3} - 10^{-1}$	$10^{-6} - 10^{-4}$
Arenas limosas, arenas finas	$10^{-2} - 1$	$10^{-5} - 10^{-3}$
Arenas bien distribuidas	$1 - 10^2$	$10^{-3} - 10^{-1}$
Gravas bien distribuidas	$10 - 10^3$	$10^{-2} - 1$

La permeabilidad intrínseca es una función del tamaño de los poros en el sedimento no consolidado. Mientras más pequeño es el tamaño de los sedimentos, más grande es el área superficial en contacto con el agua contenida en los poros. Este aumento en el área superficial provoca un incremento en la resistencia friccional al flujo, lo que disminuye la permeabilidad intrínseca.



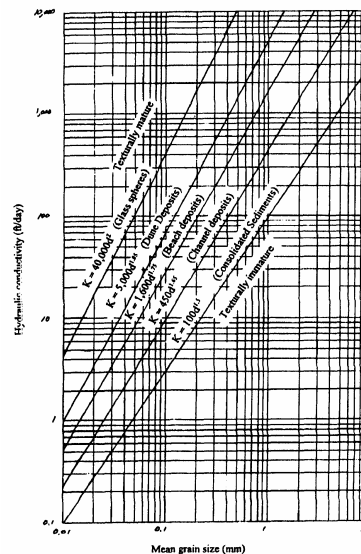
CI66J

MÉTODOS INDIRECTOS PARA CALCULAR K

Shepperd (1989)

$$K = C \cdot (d_{50})^j$$

donde d_{50} es el tamaño medio de los sedimentos (cm) y j es un exponente cuyo valor depende del tipo de textura de los sedimentos. De esta manera, un sedimento redondeado presenta un valor de j cercano a 2.0, mientras que para sedimentos naturales este exponente es igual a 1.5.



CI66J

METODOS INDIRECTOS PARA CALCULAR K

$$K = \frac{r \cdot g}{m} \cdot C \cdot f(n) \cdot d_{10}^2 = \frac{g}{n} \cdot C \cdot f(n) \cdot d_{10}^2$$

METODO	C	f(n)	OBSERVACIONES
Hazen	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 + 10 \cdot (n - 0.26)$	$U < 5$ $0.1 \text{ mm} < d_{10} < 3 \text{ mm}$
Kozeny	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$\frac{n^3}{(1-n)^2}$	Arena Gruesa
Breyer	$6 \cdot 10^{-4} \cdot \log\left(\frac{500}{U}\right)$	1	$1 < U < 20$ $0.06 \text{ mm} < d_{10} < 0.6 \text{ mm}$

g	Aceleración de gravedad	m/s ²
n	Viscosidad cinemática	m ² /s
d ₁₀	Diámetro efectivo	mm
n	Porosidad	-
U	Coefficiente de Uniformidad	-



CI66J

METODOS INDIRECTOS PARA CALCULAR K

Fair and Hatch (1933)

$$K = \frac{r \cdot g}{m} \cdot \frac{n^3}{(1-n)^2} \cdot \frac{1}{m \cdot \left[\frac{S}{100} \cdot \sum \frac{p_j}{d_{jm}} \right]^2}$$

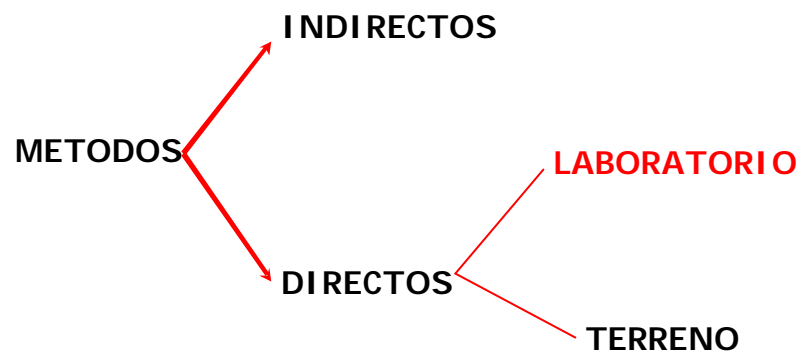
donde m es un factor de envase que vale 5, g es la aceleración de gravedad, S es un factor de forma de los granos de material (6,0 para granos esféricos y 7,7 para granos angulares), n es la porosidad de la muestra, p_j es el porcentaje de material contenido entre las mallas de diámetro d_j y d_{j+1}, y finalmente d_{jm} es el diámetro medio definido como:

$$d_{jm} = \sqrt{d_j \cdot d_{j+1}}$$



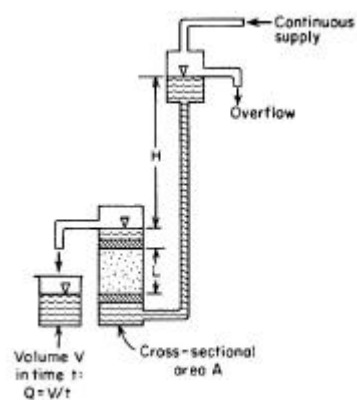
CI66J

METODOS PARA CALCULAR CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA



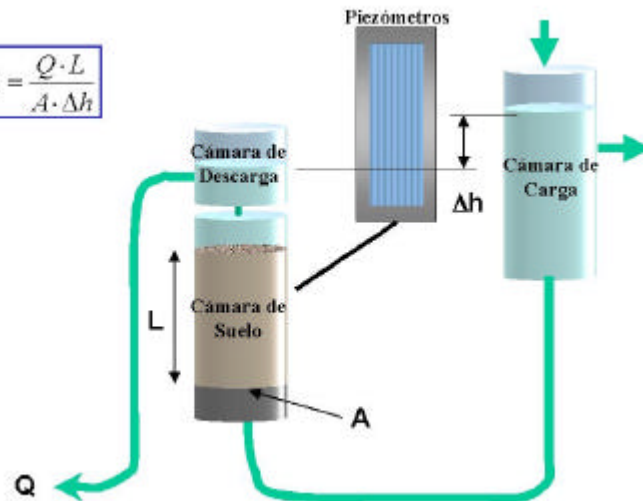
CI66J

METODOS DIRECTOS PARA CALCULAR K (LABORATORIO)



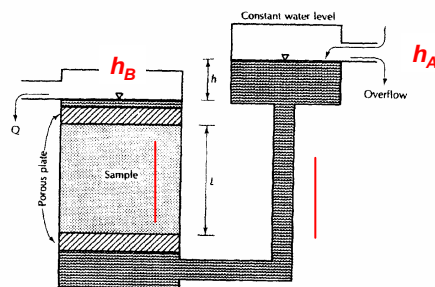
CI66J

$$K = \frac{Q \cdot L}{A \cdot \Delta h}$$



CI66J

• **MÉTODOS DIRECTOS PARA CALCULAR K
(PERMEAMETRO DE CARGA CONSTANTE)**

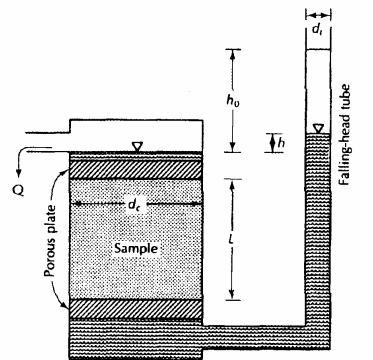


$$K = \frac{V}{A \cdot t} \cdot \frac{L}{h_A - h_B}$$

A: área de la muestra
L: longitud de la muestra

CI66J

• METODOS DIRECTOS PARA CALCULAR K
(PERMEAMETRO DE CARGA VARIABLE)



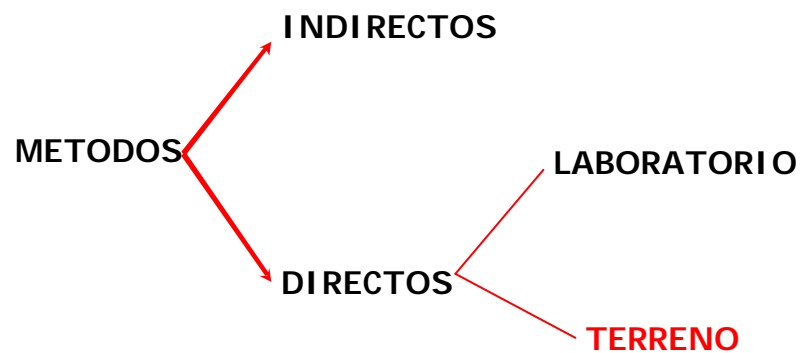
$$K = \frac{d_t^2 \cdot L}{d_c^2 \cdot t} \cdot \ln \frac{h_0}{h}$$

$$K = \frac{d_t^2 \cdot L}{d_c^2} \cdot \frac{\ln \frac{h_1}{h_2}}{t_2 - t_1}$$

$$K = \frac{d_t^2 \cdot L}{d_c^2} \cdot \frac{\ln h_1 - \ln h_2}{t_2 - t_1}$$

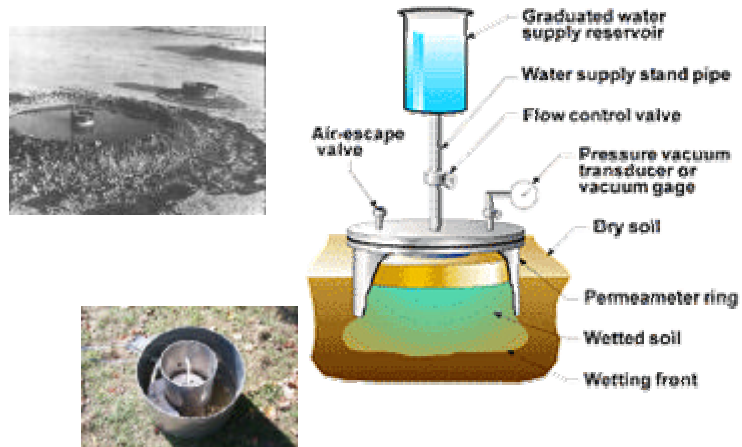
CI66J

METODOS PARA CALCULAR CONDUCTIVIDAD
HIDRAULICA



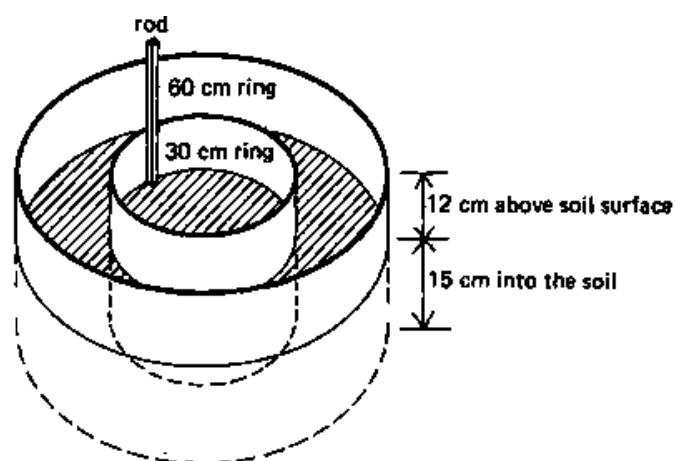
CI66J

METODOS DIRECTOS PARA CALCULAR K (TERRENO)



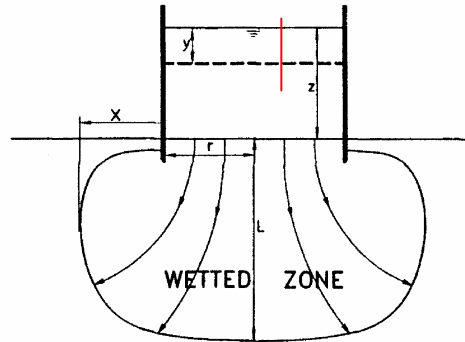
CI66J

METODOS DIRECTOS PARA CALCULAR K (INFILTROMETRO CILINDRICO)



CI66J

METODOS DIRECTOS PARA CALCULAR K (METODO DE BOUWER)



La figura muestra un ejemplo de una prueba de infiltración, en la cual el agua se comienza a expandir lateralmente a medida que se incorpora hacia el suelo. Lo anterior hace necesario corregir la tasa de infiltración calculada.



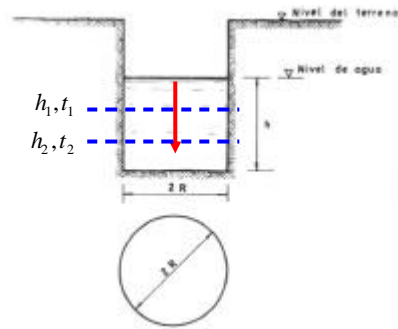
CI66J

METODOS DIRECTOS PARA CALCULAR K (PRUEBAS DE INFILTRACION)



CI66J

MÉTODOS DIRECTOS PARA CALCULAR K (MÉTODO DE PORCHET)



$$f = \frac{R}{2(t_2 - t_1)} \ln \left(\frac{2h_1 + R}{2h_2 + R} \right)$$

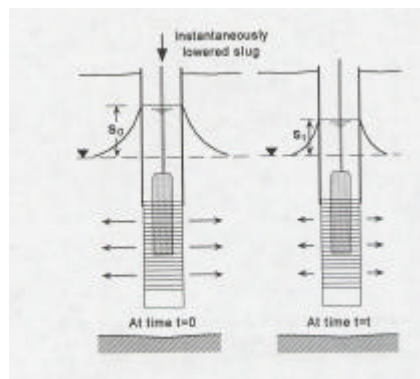
Para la estimación de la tasa de infiltración, f , en terreno se puede utilizar el método de Porchet, el cual consiste en excavar un cilindro de radio R y se llenarlo con agua hasta una altura h .



CI66J

MÉTODOS DIRECTOS PARA CALCULAR K ("SLUG" TESTS)

"Slug tests" se llevan a cabo subiendo o bajando en forma instantánea el nivel de agua en una perforación y midiendo la recuperación del nivel de aguas original (previo a la prueba).



CI66J

PROPIEDADES DE UN SUELO
 CARGA HIDRAULICA TOTAL Y POTENCIAL
 PIEZOMETRICO
 LEY DE DARCY
PROPIEDADES DE UN ACUIFERO
 CONSERVACION DE MASA PARA FLUJO EN
 UN MEDIO POROSO



CI66J

TRANSMISIBILIDAD O TRANSMISIVIDAD

Un concepto muy útil en la práctica habitual es la **transmisividad o transmisibilidad** de un sistema acuífero, la que mide la cantidad de agua, por unidad de ancho, que puede ser transmitida horizontalmente a través del espesor saturado de un acuífero con un gradiente hidráulico igual a 1 (unitario).

La transmisividad es el producto de la conductividad hidráulica (K) y el espesor saturado del acuífero (b):

$$T = b \cdot K$$

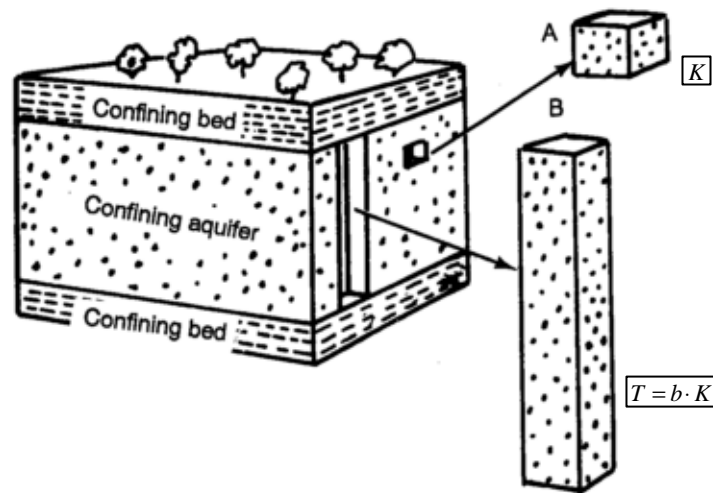
Para un acuífero compuesto de muchos estratos la transmisividad total es la suma de las transmisividades de cada estrato:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i$$



CI66J

TRANSMISIBILIDAD O TRANSMISIVIDAD



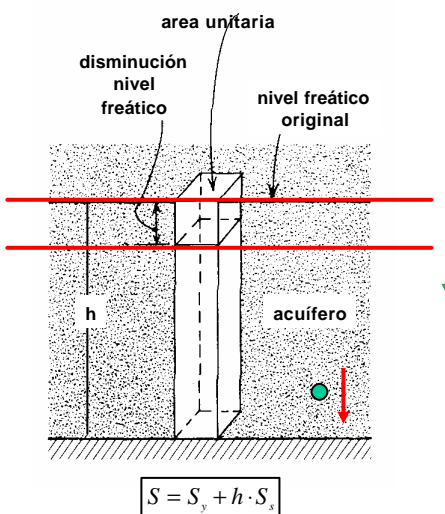
CI66J

COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO

Aparte de liberar agua debido a un drenaje de los poros del suelo se produce una liberación adicional de agua debido a cambios en la presión de poros.

Si la presión interna aumenta, el esqueleto mineral se expande, mientras que si la presión disminuye el esqueleto se contrae. Este concepto se conoce como *elasticidad*.

Asimismo, el agua se contrae debido a un aumento en la presión y se expande frente a una disminución en la presión.



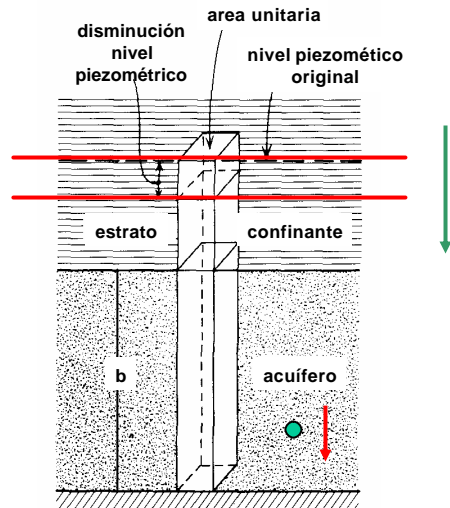
CI66J

COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO

En un acuífero **confinado** la carga hidráulica puede disminuir pero el nivel piezométrico puede permanecer sobre la unidad confinante. En este caso una cantidad de agua es liberada desde almacenamiento y el acuífero permanece saturado.

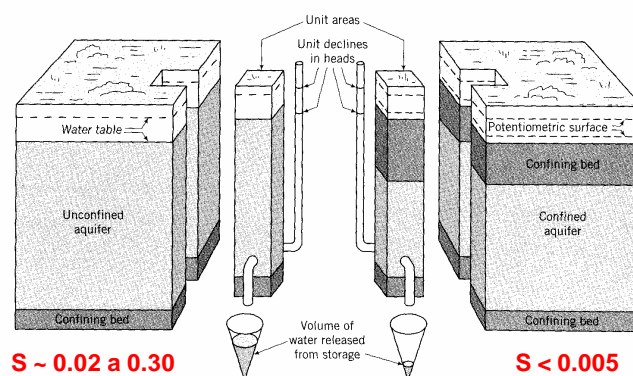
El coeficiente de almacenamiento (S) de un acuífero confinado es el producto del almacenamiento específico (S_s) y del espesor del acuífero:

$$S = b \cdot S_s$$



CI66J

COEFICIENTE DE ALMACENAMIENTO



El volumen de agua drenado desde un acuífero, debido a una reducción en su carga hidráulica puede ser calculado como:

$$V_w = S \cdot A \cdot \Delta h$$

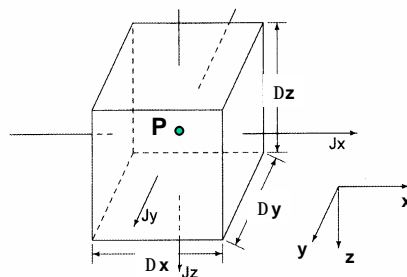
CI66J

PROPIEDADES DE UN SUELO
 CARGA HIDRAULICA TOTAL Y POTENCIAL
 PIEZOMETRICO
 LEY DE DARCY
 PROPIEDADES DE UN ACUIFERO
**CONSERVACION DE MASA PARA FLUJO EN
 UN MEDIO POROSO**



CI66J

Consideremos un volumen de control rectangular con dimensiones Dx , Dy y Dz , mientras que su centro de masa P se encuentra ubicado en las coordenadas (x,y,z) .



$\underline{L} = \underline{r} \cdot \underline{v}$: Flujo por unidad de área y tiempo

$$v_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x}$$



CI66J

Supongamos que el vector \underline{J} representa el flujo de masa (masa por unidad de área y tiempo) de agua con densidad ρ en el punto $P(x,y,z)$:

$$\underline{J} = \mathbf{r} \cdot \underline{v}$$

donde \underline{v} es el vector de descarga específica o velocidad de Darcy.

El flujo neto de masa en la dirección x , G_x , se puede escribir como:

$$G_x = \left(J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

En forma similar, en las direcciones y y z podemos escribir:

$$G_y = \left(J_y \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}, z} - J_y \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}, z} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z$$

$$G_z = \left(J_z \Big|_{x, y, z-\frac{\Delta z}{2}} - J_z \Big|_{x, y, z+\frac{\Delta z}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$



CI66J

El flujo neto de masa dentro del área de control, G_T , está dado por la suma de las cantidades anteriores:

$$G_T = \left(J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} \right) \cdot \Delta y \cdot \Delta z + \left(J_y \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}, z} - J_y \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}, z} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta z + \left(J_z \Big|_{x, y, z-\frac{\Delta z}{2}} - J_z \Big|_{x, y, z+\frac{\Delta z}{2}} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

La masa de fluido almacenada dentro del volumen de control está dada por la densidad del fluido, la porosidad del medio y las características geométricas de este, i.e:

$$M = \mathbf{r} \cdot n \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Dado que las dimensiones del volumen de control se mantienen fijas en el tiempo, la tasa temporal de cambio de la masa almacenada dentro de este es:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r} \cdot n)$$



CI66J

Una forma alternativa de expresar la tasa de variación temporal de la masa almacenada dentro del volumen de control puede ser derivada a partir de la definición del almacenamiento específico, S_s .

$$S_s = \frac{\Delta V_w}{V_T \cdot \Delta h}$$

$$\Delta V_w = S_s \cdot V_T \cdot \Delta h$$

donde ΔV_w es el cambio en el volumen de agua liberado por un volumen de acuífero V_T cuando la carga hidráulica cambia en un Δh .

De esta forma, la tasa de variación temporal de la masa almacenada dentro del volumen de control $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, suponiendo que el fluido no experimenta variación de densidad, es igual a:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = r \cdot S_s \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$



CI66J

Considerando la conservación de masa podemos igualar las expresiones anteriores:

$$G_T = \frac{\partial M}{\partial t}$$

para obtener:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Delta x} \left(J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z} \right) - \frac{1}{\Delta y} \left(J_y \Big|_{x, y+\frac{\Delta y}{2}, z} - J_y \Big|_{x, y-\frac{\Delta y}{2}, z} \right) - \\ & - \frac{1}{\Delta z} \left(J_z \Big|_{x, y, z+\frac{\Delta z}{2}} - J_z \Big|_{x, y, z-\frac{\Delta z}{2}} \right) = r \cdot S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned}$$

Si tomamos el límite de la ecuación anterior cuando el tamaño del volumen de control se reduce, es decir, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, y $\Delta z \rightarrow 0$ podemos recordar la definición de una derivada parcial para escribir:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{J_x \Big|_{x+\frac{\Delta x}{2}, y, z} - J_x \Big|_{x-\frac{\Delta x}{2}, y, z}}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} J_x$$



CI66J

De esta manera, al reemplazar la definición de una derivada parcial en la ecuación anterior se obtiene:

$$-\left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

lo que puede ser escrito en forma reducida como:

$$-\nabla \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{S}_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

Pero, dado que la variación de densidad del fluido es prácticamente nula:

$$-\nabla \cdot \mathbf{v} = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$



CI66J

Utilizando la ley de Darcy podemos desarrollar la ecuación anterior. Si suponemos que el medio poroso es heterogéneo y anisotrópico, y que el sistema de coordenadas x, y, z está alineado con las direcciones principales de anisotropía:

$$v_x = -K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v_y = -K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$v_z = -K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z}$$

Substituyendo la ley de Darcy en la ecuación básica de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t}$$

Esta ecuación se puede resolver para h(x,y,z,t) por medio de diferentes programas:

MODFLOW - FEFLOW - ASMWIN - FEMWATER

