Unicidad del problema EUE

Para demostrar unicidad basta demostrar que el Hessiano de la función $Z(x)$ es definido positivo $\Rightarrow$ problema es estrictamente convexo.

Recordar que $$Z(x) = -\sum_{k\in K} q_k \mathbb{E}\left[\min_{l\in R_k}\{C_l\} / c(x)\right] + \sum_{a\in A} x_a t_a(x_a) - \sum_{a\in A}\int_0^{x_a} t_a(w)\,dw$$

Término típico del Hessiano $\dfrac{\partial^2 Z(x)}{\partial x_b \partial x_a}$

Usando las C.P.O como pto. de partida, es posible computar:

$$\text{(HT)}\qquad \frac{\partial^2 Z(x)}{\partial x_a \partial x_b} = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{k\in K} q_k \sum_{l\in R_k}\sum_{m\in R_k} \frac{\partial P_l}{\partial C_m}\left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{bm}\right)\left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{bl}\right) + \frac{dt_b}{dx_b} \\ \quad + \left[-\displaystyle\sum_{k\in K}\sum_{l\in R_k} q_k P_l \delta_{bl} + x_b\right]\dfrac{d^2 t_b}{dx_b^2} & \text{para } a=b \\ \\ -\displaystyle\sum_{k\in K} q_k \sum_{l\in R_k}\sum_{m\in R_k} \frac{\partial P_l}{\partial C_m}\left(\frac{dt_a}{dx_a}\delta_{am}\right)\left(\frac{dt_b}{dx_b}\delta_{bl}\right) & \text{para } a\neq b \end{cases}$$

Eq (HT) representa término $\begin{array}{cc} & a \\ b & \left[\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ & \vdots & \end{array}\right] \end{array}$

En términos matriciales $$\nabla^2 Z(x) = \sum_{k\in K} q_k \left[(\nabla_x t\, \Delta^k)\cdot(-\nabla_c P^k)\cdot(\nabla_x t\, \Delta^k)^T\right] + \nabla_x t + \nabla_x^2 t \cdot R$$

Unicidad del problema EUE

Hessiano es matriz de $A \times A$ donde

- $\nabla_x t$: Jacobiano del vector arco-tpo de viaje (dimensión $A \times A$). Ya mostramos que si no hay interacción entre arcos, se trata de una matriz diagonal con elementos dt_a/dx_a distintos de cero.

- Δ^k : matriz de incidencia arco-ruta. Matriz de dimensión $A \times \# R_k$, que tiene a δ_{al} como elemento típico.

- $\nabla_c P^k$: Jacobiano del vector de probabilidades de elección $(\ldots, P_\ell, \ldots)_{\ell \in R_k}$ c/respecto a tiempos de viaje en ruta. Dimensión $\# R_k \times \# R_k$, cuyo término típico es $\partial P_\ell / \partial c_m$

- $\nabla_x^2 t$: matriz diagonal (dimensión $A \times A$) con términos de la forma $d^2 t_a / dx_a^2$ en la diagonal

- R : matriz diagonal (dimensión $A \times A$), donde el $a^{\text{ésimo}}$ término es

$$\left(-\sum_{k \in K} \sum_{\ell \in R_k} q_r P_\ell \delta_{a\ell} + x_a \right)$$

Analicemos componente a componente el Hessiano $\nabla^2 z(x)$

1. $$\sum_{k \in K} q_k \left[(\nabla_x t \; \Delta^k)(-\nabla_c P^k)(\nabla_x t \; \Delta^k)^T \right] = \sum_{k \in K} q_k \underbrace{A B A^T}_{\text{matriz semidefinida positiva}}$$

   notar que $-\nabla_c P^k$ es semidefinida positiva, ya que $\nabla_c P^k$ es semidefinida negativa dado que $S_k(c)$ es cóncava.

2. $\nabla_x t$: matriz definida positiva (matriz diagonal con términos > 0)

$\Rightarrow$ ① + ② es matriz definida positiva.

Unicidad del problema EUE

(3) Producto de dos matrices $\underbrace{\nabla_x^2 t}_{\text{matriz diagonal, términos >0}} \cdot R$

R tiene términos del tipo $\left[-\sum_{k \in K} \sum_{\ell \in \ell_k} q_k P_\ell \delta_{a\ell} + x_a \right]$ en la diagonal, los cuales pueden tener cualquier signo.

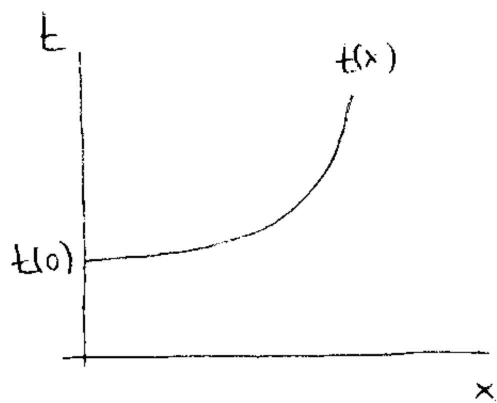
En el óptimo, sin embargo $x_a - \sum_{k \in K} \sum_{\ell \in \ell_k}' q_k P_\ell \delta_{a\ell} \rightarrow 0$ y por ende la última matriz se anula.

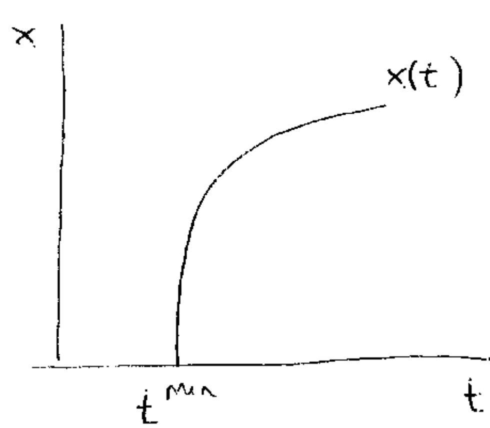
$\Rightarrow$ En el óptimo, el Hessiano es definido positivo, y el programa EUE es estrictamente convexo en ese punto.

$\Rightarrow$ Equilibrio es un mínimo local.

Para probar que este mínimo es único, hagamos una transformación de la función de rendimiento

$x_a(t_a)$ es la inversa de $t_a(x_a)$, la cual existe y es monótona.
$x_a(t_a)$ crece, para todo t_a positivo, y es positiva $\forall\, t_a > t_a^{min}$
donde $t_a^{min} = t_a(0)$.





Podemos escribir EUE como función de t en vez de x, introduciendo $x_a = x_a(t_a)$ en (PEE)

Unicidad del problema EUE

$$Z(t) = -\sum_{k\in K} q_k \, \mathbb{E}\left[\min_{l}\left\{C_l / c(x(t))\right\}\right] + \sum_{a\in A} x_a(t_a)\, t_a \; +$$

$$- \sum_{a} \int_{t_a^{min}}^{t_a} \nu \frac{dx_a(\nu)}{d\nu}\, d\nu$$

que se puede reducir a (integrando por partes)

$$Z(t) = -\sum_{k\in K} q_k \, \mathbb{E}\left[\min_{l}\left\{C_l / c\right\}\right] + \sum_{a\in A} \int_{t_a^{min}}^{t_a} x_a(\nu)\, d\nu$$

de donde

$$\nabla Z(t) = -\sum_{k\in K} q_k P^k \Delta^{k^T} + X$$

donde $\dfrac{\partial Z(t)}{\partial t_a} = -\sum_{k\in K} q_k \sum_{l\in R_k} P_l \, \delta_{al} + x_a$

Notar que el gradiente de $Z(x)$ y de $Z(t)$ siempre tienen el mismo signo y se hacen cero en los mismos puntos.

Hessiano de $Z(t)$ es: $\nabla^2 Z(t) = \sum_{k\in K} q_k \underbrace{(\Delta^k)(-\nabla_c P^k)(\Delta^k)^T}_{\text{semidefinida positiva}} + \underbrace{\nabla_t X}_{\text{definida positiva (diagonal con términos } dx_a(t_a)/dt_a)}$

$\Rightarrow \nabla^2 Z(t)$ es definida positiva $\Rightarrow Z(t)$ es estrictamente convexa con pto. estacionario que corresponde al mínimo.

$Z(x)$ y $Z(t)$ están relacionadas por una transformación monotónica (uno a uno), y dado que el gradiente de $Z(t)$ se hace cero en sólo un pto. $\Rightarrow Z(x)$ tiene tb. un sólo mínimo, estableciéndose la unicidad del mínimo de $Z(x)$. Esta fn. es estrictamente convexa en la vecindad del mínimo, pero no necesariamente convexa en otra parte. Sin embargo, su mínimo local es tb. mínimo global.