APUNTES COMPLEMENTARIOS PARA REDES DE TRANSPORTE, CI 53J-73B

FORMULACIÓN COMO INECUACIÓN VARIACIONAL DEMANDA ELÁSTICA

Consideremos nuevamente el problema de equilibrio, esta vez suponiendo que $t_a(x) > 0$ y $D_k(u) > 0$ para todo $(x,u) \geq 0$. En tal caso todo equilibrio satisface $u^* > 0$ y por lo tanto $q^* \in D$ con $D = \{D(u) : u > 0\}$. En efecto, para $k \in K$ tenemos $q_k^* = D_k(u^*) > 0$ y en consecuencia existe $l \in R_k$ tal que $f_l^* > 0$, de lo cual se sigue $u_k^* = c_l(x^*) > 0$. Supondremos que D es abierto y que la función de demanda $D(u) = (D_k(u))_{k \in K}$ tiene una inversa $D^{-1} : D \rightarrow IR_+^K$. Con esto (F_0) se expresa de manera equivalente como $u^* = D^{-1}(q^*)$. Definamos X_D como el conjunto de los (x,q) tales que $q \in D$ y $x \in X_D$ y consideramos la inecuación variacional

(EDE) $\boxed{\text{Encontrar } (x^*,q^*) \in X_D \text{ t.q. } t(x^*)(x - x^*) - D^{-1}(q^*) \cdot (q - q^*) \geq 0, \forall (x,q) \in X_D}$

Proposición Si (f^*, x^*, q^*, u^*) es un equilibrio entonces (x^*, q^*) resuelve (EDE). Inversamente, si (x^*, q^*) es solución de (EDE), definiendo $u^* = D^{-1}(q^*)$ y tomando $f^* \geq 0$ que satisfaga (F_1) y (F_2), el vector (f^*, x^*, q^*, u^*) es un equilibrio

Demostración:

$(\Rightarrow)$ al igual que en la Proposición demostrada para el caso de demanda inelástica, dado $(x,q) \in X_D$ y escogiendo $f \geq 0$ que satisface (F_1) y (F_2), la condición (W) implica

$$\sum_{k \in K} \sum_{l \in R_k} c_l(x^*)(f_l - f_l^*) \geq \sum_{k \in K} u_k^* \sum_{l \in R_k} (f_l - f_l^*) = \sum_{k \in K} u_k^* (q_k - q_k^*) \tag{1}$$

La condición (F_0) permite reemplazar $u_k^* = D_k^{-1}(q^*)$ y usando (1) se obtiene (EDE).

$(\Leftarrow)$ Sea $k \in K$ y $l \in R_k$. Definamos f igual a f^* salvo $f_l = f_l^* + d$ y q igual a q^* salvo $q_k = q_k^* + d$, con $d > 0$ pequeño de modo tal que $q \in D$. Sea x asociado a f mediante (F_2). Se sigue que $(x,q) \in X_D$ y en consecuencia (EDE) implica $c_l(x^*) d \geq u_k^* d$ de donde $c_l(x^*) \geq u_k^*$. Ahora, si $f_r^* > 0$ podemos considerar $d > 0$ pequeño de modo tal que $f > 0$ y $q \in D$, con lo cual el análisis anterior conduce a $c_l(x^*) \geq u_k^*$ estableciendo (W).

A partir de la inecuación variacional asociada a este problema (EDE), es posible demostrar que en este caso la función $F(\cdot)$ definida para el problema genérico, admite un potencial al igual que en el caso de demanda inelástica. En este contexto, se agrega la condición de contar con funciones de demanda continuas y estrictamente decrecientes del tipo $u_k \mapsto D_k(u_k)$. En tal caso D es de la forma $D = \prod_{k \in K} (a_k, b_k)$ y las funciones inversas $q_k \mapsto D_k^{-1}(q_k)$ son también decrecientes. El problema de optimización asociado a este caso resulta ser

$$\text{(PE)} \qquad \underset{(x,q) \in X_q}{Min} \quad \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w)\, dw - \sum_{k \in K} \int_0^{q_k} D_k^{-1}(z)\, dz$$