Control Nº 1
22-04-2005

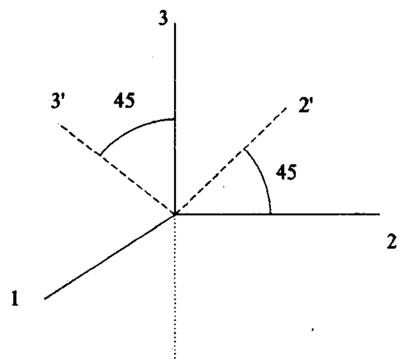
1. Demostrar que, para pequeñas deformaciones, las líneas que pasan por un punto P(x,y) en un problema plano y que tienen la rotación máxima o mínima en el punto son aquellos que tienen las direcciones dadas por:

$$Tg(2\theta) = \frac{v,_y - u,_x}{v,_x + u,_y}$$

2. Demuestre que para pequeñas deformaciones las componentes del tensor de Green corresponden a las deformaciones extensionales y a la mitad de las deformaciones angulares. Demuestre, también, que si además las rotaciones son pequeñas, entonces las componentes del tensor de Green se simplifican a las componentes de tensor de Cauchy.

3. Dado el estado de deformación en un punto de un cuerpo:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$



a) Calcular la deformación unitaria de la fibra 2' (bisectriz interior de (2,3))

b) Calcular el ángulo entre las bisectrices 2' y 3'

(2' esta contenida en el plano que forman 2 y 3;
3' esta contenida en el plano que forman 1 y 3).

5. Dadas las funciones de corrimiento

$$u = a\,x^2 + b\,y^2$$
$$v = c\,y^2 + d\,z^2$$
$$w = e\,z^2 + f\,x^2$$

con $a = 1;\ b = 2;\ c = 3;\ d = 1;\ e = 2;\ f = 3$

- Determinar el tensor de deformaciones de Green correspondiente.
- Determinar la deformación extensional en la dirección $d = (1,2,3)$
- Determinar la deformación angular entre los ejes x y z

¿Qué ocurre si los valores de a,b,c,d,e y f son la centésima parte de los valores dados originalmente?

FORMULARIO
CI42F Mecánica de Sólidos II

Direcciones principales

$$|t_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = -\lambda^3 + \lambda^2 I_1 - \lambda I_2 + I_3 = 0$$

Rotación de coordenadas en el plano

$$t'_{11} = \frac{1}{2}(t_{11}+t_{22}) + \frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\cos 2\theta + t_{12}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$t'_{22} = \frac{1}{2}(t_{11}+t_{22}) - \frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\cos 2\theta - t_{12}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$t'_{12} = t_{12}\cos 2\theta - \frac{1}{2}(t_{11}-t_{22})\operatorname{sen} 2\theta$$

Tensión en dirección de ν

$$\sigma_\nu = \nu_k \sigma_k$$

Ecuación de equilibrio

$$\sigma_{ij,i} + f_j = 0$$

Deformación en un punto

$$dS^2 - ds^2 = (\xi_{k,i}\xi_{k,j} - \delta_{ij})dx_i dx_j = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j$$

Deformación extensional

$$E_{\lambda\lambda} = \sqrt{1 + 2\lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ij}} - 1$$

donde $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\xi_{k,i}\xi_{k,j} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$ (tensor de Green)

Deformación angular

$$\operatorname{sen}\phi_{\lambda\mu} = \frac{\left(\xi_{k,i}\xi_{k,j} - \delta_{ij}\right)\lambda_i \mu_i}{\left(1+E_{\lambda\lambda}\right)\left(1+E_{\mu\mu}\right)} = \frac{2\lambda_i \mu_j \varepsilon_{ij}}{\left(1+E_{\lambda\lambda}\right)\left(1+E_{\mu\mu}\right)}$$

Rotaciones

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{j,i} - u_{i,j}\right)$$

Ecuaciones de compatibilidad

$$2\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11}$$
$$2\varepsilon_{23,23} = \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22}$$
$$2\varepsilon_{31,31} = \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33}$$
$$\varepsilon_{11,23} = \left(\varepsilon_{12,3} + \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{23,1}\right)_{,1}$$
$$\varepsilon_{22,31} = \left(\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{31,2}\right)_{,2}$$
$$\varepsilon_{33,12} = \left(\varepsilon_{31,2} + \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{12,3}\right)_{,3}$$

Relaciones entre módulos

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Módulos de elasticidad volumétrico

$$\frac{\sigma_0}{\theta} = K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Relaciones constitutivas para material isótropo

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\left(\frac{3\nu}{E}\sigma_0 - \alpha\Delta T\right) \qquad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\left(\lambda\theta - 3K\alpha\Delta T\right)$$

Ecuación de Lamé-Navier

$$\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\left(\frac{3\nu}{E}\sigma_0 - \alpha\Delta T\right) \quad (6 \ \textit{ecuaciones})$$

Ecuaciones de Beltrami-Michell

$$\nabla^2\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\sum\nolimits_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij} f_{k,k} - (f_{i,j} + f_{j,i})$$

Elasticidad Plana: Función de Airy

$$\sigma_{xx} = \phi_{,yy}$$
$$\sigma_{yy} = \phi_{,xx}$$
$$\sigma_{xy} = -\phi_{,xy}$$

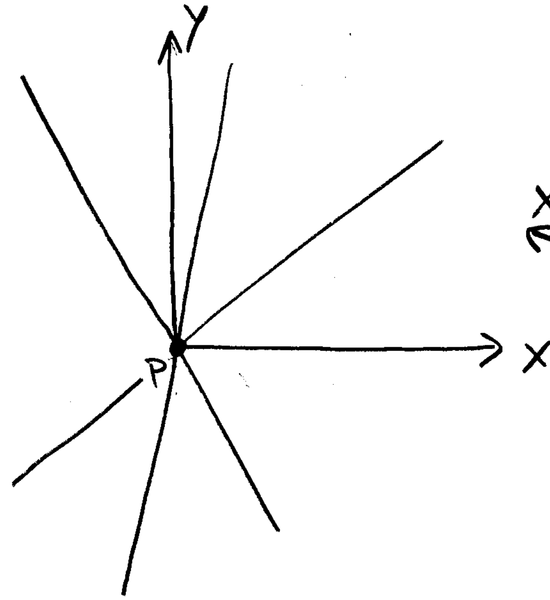
Compatibilidad

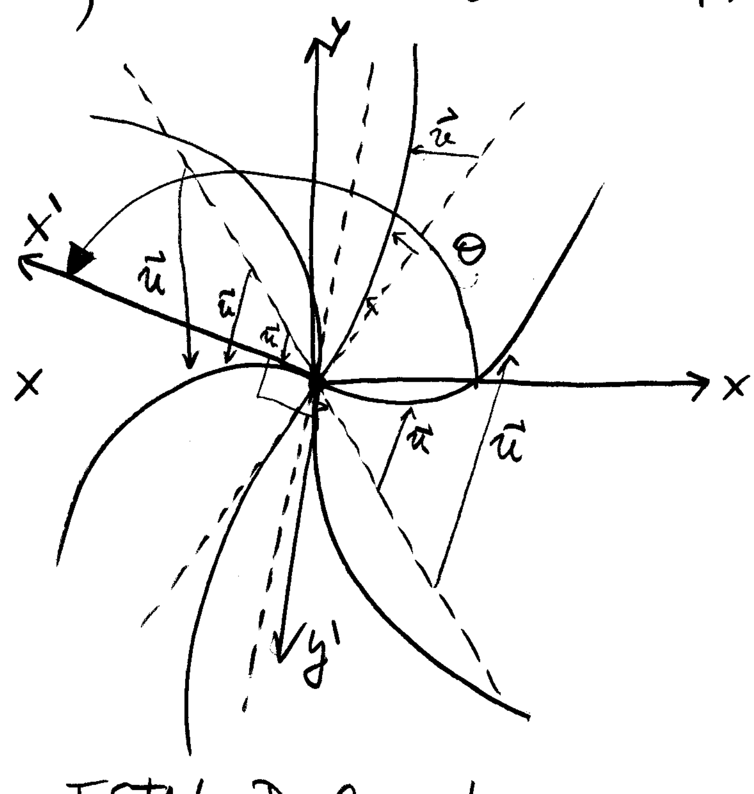
$$\nabla^4\phi = 0$$

Demostrar que, para pequeñas deformaciones, las líneas que pasan por un punto $P(x,y)$ en un problema plano y que tienen la rotación máxima o mínima en el punto, son aquellos que tienen las direcciones dadas por:

$$tg(2\theta) = \frac{v_{,y} - u_{,x}}{v_{,x} + u_{,y}}$$

sol:// tenemos el siguiente problema, el determinar la dirección o el ángulo "θ" de un sistema rotado (x', y') tal que la "rotación" de las líneas rectas (en el estado no deformado) que pasan por el punto, sea máxima o mínima.





lo anterior se traduce en imponer una condición de óptimo (máximo o mínimo) sobre la deformación angular en el punto en función del ángulo "θ" de rotación del sistema de coordenadas. Como se tiene la hipótesis de pequeñas deformaciones basta imponer la condición de optimo sobre ε_{12}' (del tensor de cauchy) en un sistema de coordenadas rotado.

$$\varepsilon_{12}' = \varepsilon_{12}\cos(2\theta) - \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\,\mathrm{sen}(2\theta)$$

tenemos que

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} = u_{,x}$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} = v_{,y}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$$

$$= \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{12}' = \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x})\cos(2\theta) - \frac{1}{2}(u_{,x} - v_{,y})\,\mathrm{sen}(2\theta)$$

luego

$$\frac{d\varepsilon_{12}'}{d\theta} = -\frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x})\,\mathrm{sen}(2\theta)\cdot 2 - \frac{(u_{,x} - v_{,y})}{2}\cos(2\theta)\cdot 2$$

$$= 0$$

luego $\frac{d\varepsilon_{12}'}{d\theta} = 0$

$$\Rightarrow (u_{,y} + v_{,x})\, \text{sen}(2\theta) = (v_{,y} - u_{,x}) \cdot \cos(2\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{tg(2\theta) = \frac{v_{,y} - u_{,x}}{u_{,y} + v_{,x}}}$$

Pauta P2 control 1 CI42F 2005/01

Demuestre que para pequeños deformaciones, las componentes del tensor de Green corresponden a las deformaciones extensionales y a la mitad de las deformaciones angulares. Demuestre, también, que si además las rotaciones son pequeñas, entonces las componentes del tensor de Green se simplifican a las componentes del tensor de Cauchy.

Sol://

La deformación extensional en una dirección λ_i es:

$$E_{\lambda\lambda} = \sqrt{1 + 2\lambda_i \lambda_j \cdot \varepsilon_{ij}} - 1$$

Para pequeñas deformaciones ε_{ij} es muy pequeño, ie $|\varepsilon_{ij}| << 1$

luego si hacemos el desarollo de taylor de primer orden de $E_{\lambda\lambda}$ en torno a $\varepsilon_{ij} = 0$ tenemos:

$$E_{\lambda\lambda} \cong \sqrt{1 + 2\lambda_i\lambda_j \cdot 0} - 1 + \frac{2\lambda_i\lambda_j}{2\sqrt{1+2\lambda_i\lambda_j \cdot 0}} \cdot (\varepsilon_{ij} - 0)$$

$\Rightarrow E_{\lambda\lambda} \cong \lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ij}$ (para pequeñas deformaciones).

ahora si la dirección $\hat{\lambda}$ coincide con un eje coordenado, tenemos que:

- si $\hat{\lambda} = (1,0,0)$ $(\hat{\lambda} = \hat{1})$

$$\Rightarrow E_{\lambda\lambda} = E_{11} = \lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{11}$$

- si $\hat{\lambda} = (0,1,0)$ (ie, $\hat{\lambda} = \hat{2}$)

$$\Rightarrow E_{\lambda\lambda} = E_{22} = \lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{22}.$$

- si $\hat{\lambda} = (0,0,1)$, (ie, $\hat{\lambda} = \hat{3}$)

$$\Rightarrow E_{\lambda\lambda} = E_{33} = \lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{33}$$

luego para pequeñas deformaciones, la deformación extensional en una dirección coincidente con un eje coordenado, coincide con la componente respectiva, de la diagonal, del tensor de deformación de Green.

Veamos las deformaciones angulares:

la deformación angular entre dos direcciones $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ originalmente perpendiculares es:

$$\operatorname{sen}(\phi_{\lambda\mu}) = \frac{2\,\lambda_i \mu_j \varepsilon_{ij}}{(1+E_{\lambda\lambda})(1+E_{\mu\mu})}$$

$$\Rightarrow \lambda_i \mu_j \varepsilon_{ij} = (1+E_{\lambda\lambda})(1+E_{\mu\mu})\,\frac{\operatorname{sen}(\phi_{\lambda\mu})}{2}.$$

ahora si $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ corresponden a la dirección de 2 ejes coordenados, $\operatorname{sen}(\phi_{\lambda\mu})$ será la deformación angular entre esos ejes, por ejemplo si $\hat{\lambda} = \hat{1}$ y $\hat{\mu} = \hat{2}$ tenemos que

$\hat{\lambda} = (1,0,0)$ y $\hat{\mu} = (0,1,0)$.

$$\Rightarrow E_{\lambda\lambda} = \varepsilon_{11} \quad \wedge \quad E_{\mu\mu} = \varepsilon_{22}.$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 + E_{\lambda\lambda} \approx 1 \\ 1 + E_{\mu\mu} \approx 1 \end{array}\right\} \text{pequeñas deformaciones}$$

$$\Rightarrow \lambda_i \mu_j \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{12} \cong \frac{\operatorname{sen}(\phi_{12})}{2}.$$

análogamente:

$$\varepsilon_{13} \cong \frac{\operatorname{sen}(\phi_{13})}{2} \quad ; \quad \varepsilon_{23} \cong \frac{\operatorname{sen}(\phi_{23})}{2}$$

Ahora, si se impone pequeñas rotaciones tenemos que $|u_{i,j}| \ll 1$

$$\Rightarrow \boxed{u_{k,i}\, u_{k,j} \approx 0.}$$

luego

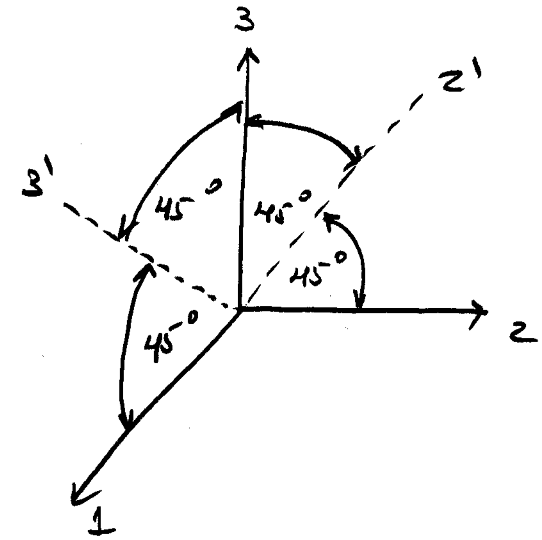
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + \underbrace{u_{k,i}\, u_{k,j}}_{\approx 0 \text{ si hay pequeñas rotaciones}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)} \quad \text{tensor de Cauchy.}$$

Pauta P3 Control 1 CI42F 2005/01

Dado el estado de deformación en un punto de un cuerpo:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$



a) Calcular la deformación unitaria de la fibra 2' (bisectriz interior de (2,3))

b) Calcular el ángulo entre las bisectrices 2' y 3' (3' es la bisectriz interior de (1,3)).

Sol: como $|\varepsilon_{ij}| \approx 10^{-4} \Rightarrow$ pequeñas deformaciones y rotaciones

a) la dirección 2' queda dada por $\hat{\lambda} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\Rightarrow E_{2'2'} = \lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{\varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33}\}$$

$$= \frac{1}{2}\{-\cancel{2} + \cancel{1} + \cancel{1} - 3\} \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{2'2'} = \frac{-3}{2} \cdot 10^{-4}}$$

b) Para calcular el ángulo entre las bisectrices 2' y 3' en el estado deformado, hay que calcular primero la deformación extensional en la fibra 3'. La dirección de la fibra 3' es $\hat{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, luego

$$E_{3'3'} = \mu_i \mu_j \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(1 + 2 + 2 - 3)\cdot 10^{-4}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10^{-4} = 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{3'3'} = 10^{-4}}$$

ahora para calcular la variación del ángulo entre las direcciones $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ tenemos que considerar que:

•) $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ si bien son vectores linealmente independientes no son ortogonales, luego

$$\hat{\lambda}\cdot\hat{\mu} \triangleq \delta_{ij}\lambda_i \mu_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

luego como $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ no son ortogonales en el estado NO deformado la fórmula

$$\operatorname{sen}(\varphi_{\lambda\mu}) = \frac{(\xi_{k,i}\xi_{k,j} - \delta_{ij})\lambda_i \mu_j}{(1+E_{\lambda\lambda})(1+E_{\mu\mu})}$$

$$= \frac{2\lambda_i \mu_j \varepsilon_{ij}}{(1+E_{\lambda\lambda})(1+E_{\mu\mu})}$$

no es válida ya que en ésta se asume que $\hat{\lambda}\cdot\hat{\mu} = \delta_{ij}\lambda_i\mu_j = 0$, es decir que $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ son ortogonales en el estado NO deformado lo que no se cumple en este caso. Luego hay que usar la formula original en función de las coordenadas del sólido deformado ξ_i. Sea α el ángulo entre las direcciones $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ en el estado NO deformado, luego

$$\cos(\alpha) = \frac{\hat{\lambda}\cdot\hat{\mu}}{\|\hat{\lambda}\|\cdot\|\hat{\mu}\|} = \frac{\langle (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) ; (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle}{1 \cdot 1}$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{60° = \alpha}$$

luego

$$\cos(\alpha - \phi_{\lambda\mu}) = \frac{\xi_{k,i}\,\xi_{k,j}\,\lambda_i\,\mu_j}{(1+E_{\lambda\lambda})(1+E_{\mu\mu})}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \phi_{\lambda\mu}) = \frac{\xi_{k,i}\,\xi_{k,j}\,\lambda_i\mu_j - \delta_{ij}\lambda_i\mu_j + \delta_{ij}\lambda_i\mu_j}{(1+E_{\lambda\lambda})(1+E_{\mu\mu})}$$

$$= \frac{(\xi_{k,i}\,\xi_{k,j} - \delta_{ij})\lambda_i\mu_j + \delta_{ij}\lambda_i\mu_j}{(1+E_{\lambda\lambda})(1+E_{\mu\mu})}$$

pero $\xi_{k,i}\,\xi_{k,j} - \delta_{ij} = 2\,\varepsilon_{ij}$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \phi_{\lambda\mu}) = \frac{2\lambda_i\mu_j\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\lambda_i\mu_j}{(1+E_{\lambda\lambda})\cdot(1+E_{\mu\mu})}$$

ahora $\cdot\ \lambda_i\mu_j\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\{\varepsilon_{21} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33}\}$

$$= \frac{1}{2}\{0 + 1 + 2 - 3\}$$

$$= 0$$

- $\delta_{ij} \lambda_i \mu_j = \frac{1}{2}$

- $E_{\lambda\lambda} = E_{2'2'} = -\frac{3}{2} \cdot 10^{-4}$

- $E_{\mu\mu} = E_{3'3'} = 1 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 60^\circ$

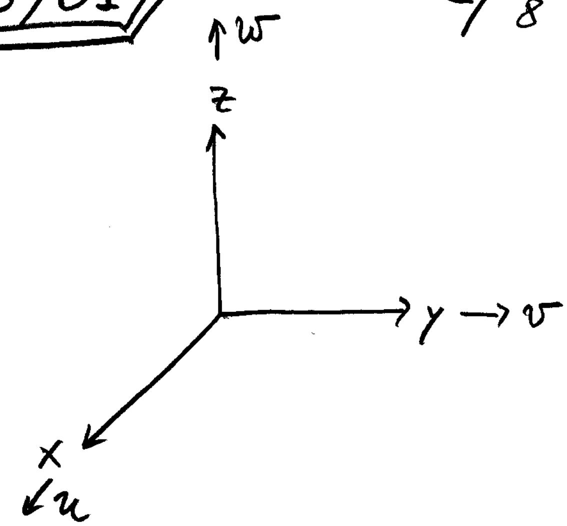
$$\Rightarrow \cos(60^\circ - \phi_{\lambda\mu}) = \frac{1/2}{\left(1 - \frac{3}{2} \cdot 10^{-4}\right)\left(1 + 1 \cdot 10^{-4}\right)} = 0{,}500025$$

$$\Rightarrow \boxed{60^\circ - \phi_{\lambda\mu} = 59{,}998^\circ} \boxed{\approx 60^\circ}$$

ángulo final, en el estado deformado, entre las direcciones 2' y 3'

Pauta P4 Control 1 CI42F 2005/01

Dadas las funciones de corrimiento



$$u = ax^2 + by^2$$
$$v = cy^2 + dz^2$$
$$w = ez^2 + fx^2$$

con $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 1$; $e = 2$; $f = 3$

i) Determinar el tensor de deformaciones de Green correspondiente.

ii) Determinar la deformación extensional en la dirección $\vec{d} = (1, 2, 3)$

iii) Determinar la deformación angular entre el eje $\hat{x}$ y el eje $\hat{z}$.

iv) ¿Qué ocurre si los valores de a, b, c, d, e y f son la centésima parte de los valores dados originalmente?

Sol//

i) El tensor de Green en función de los corrimientos es:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\, u_{k,j} \right)$$

donde $u_1 = u$; $u_2 = v$; $u_3 = w$.

$$,_1 = \frac{\partial}{\partial x} \; ; \; ,_2 = \frac{\partial}{\partial y} \; ; \; ,_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

luego

$u_{1,1} = u_{,x} = 2ax$	$u_{2,1} = v_{,x} = 0$	$u_{3,1} = w_{,x} = 2fx$
$u_{1,2} = u_{,y} = 2by$	$u_{2,2} = v_{,y} = 2cy$	$u_{3,2} = w_{,y} = 0$
$u_{1,3} = u_{,z} = 0$	$u_{2,3} = v_{,z} = 2dz$	$u_{3,3} = w_{,z} = 2ez$

$\Downarrow$

$u_{1,1} = 2x$	$u_{2,1} = 0$	$u_{3,1} = 6x$
$u_{1,2} = 4y$	$u_{2,2} = 6y$	$u_{3,2} = 0$
$u_{1,3} = 0$	$u_{2,3} = 2z$	$u_{3,3} = 4z$

luego

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left\{ 2\cdot u_{1,1} + u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 4x + 4x^2 + 36x^2 \right\} = \frac{1}{2}\left\{ 4x + 40x^2 \right\} = 2x + 20x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{11} = 2x\{1 + 10x\}}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}\left\{ 2 \cdot u_{2,2} + u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 12y + 16y^2 + 36y^2 + 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 12y + 52y^2 \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{22} = 6y + 26y^2}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left\{ 2u_{3,3} + u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2 \right\}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left\{ 8z + 0 + 4z^2 + 16z^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 8z + 20z^2 \right\} = 4z + 10z^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{33} = 4z + 10z^2}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left\{ u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1} \cdot u_{1,2} + u_{2,1} \cdot u_{2,2} + u_{3,1} u_{3,2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 4y + 0 + 2x \cdot 4y + 0 + 6x \cdot 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ 4y + 2x \cdot 4y \right\} = 2y\left\{ 1 + 2x \right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{12} = 2y(1 + 2x)}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left\{u_{1,3} + u_{3,1} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}\cdot u_{3,3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{0 + 6x + 2x\cdot 0 + 0 + 6x\cdot 4z\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{6x + 6x\cdot 4z\right\} = 3x(1+4z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{13} = 3x(1+4z)}$$

$$\cdot\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left\{u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2z + 0 + 4y\cdot 0 + 6y\cdot 2z + 0\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{23} = z(1+6y)}$$

luego el tensor de Green queda.

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 2x(1+10x) & 2y(1+2x) & 3x(1+4z) \\ \text{simétrico} & 6y+26y^2 & z(1+6y) \\ & & 4z+10z^2 \end{bmatrix}$$

ii) E_{dd} con $\vec{d} = (1,2,3)$, pero la dirección debe ser unitaria, ie, usamos $\hat{d} = \frac{\vec{d}}{\|\vec{d}\|}$

$$\|\vec{d}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow \hat{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

luego

$$E_{dd} = \sqrt{1 + 2 d_i d_j \varepsilon_{ij}} - 1.$$

$$\begin{aligned} d_i d_j \varepsilon_{ij} &= d_1^2 \varepsilon_{11} + \underline{d_1 d_2 \varepsilon_{12}} + \underline{d_1 d_3 \varepsilon_{13}} \\ &+ \underline{d_2 d_1 \varepsilon_{21}} + d_2^2 \varepsilon_{22} + \underline{d_2 d_3 \varepsilon_{23}} \\ &+ \underline{d_3 d_1 \varepsilon_{31}} + \underline{d_3 d_2 \varepsilon_{32}} + d_3^2 \varepsilon_{33} \\ &= d_1^2 \varepsilon_{11} + d_2^2 \varepsilon_{22} + d_3^2 \varepsilon_{33} + 2 d_1 d_3 \varepsilon_{13} + 2 d_1 d_2 \varepsilon_{12} \\ &\quad + 2 d_2 d_3 \varepsilon_{23}. \end{aligned}$$

$$d_i d_j \varepsilon_{ij} = \frac{1}{14} \cdot 2x(1+10x) + \frac{4}{14}(6y + 26y^2) + \frac{9}{14}(4z + 10z^2)$$

$$+ 2 \cdot \frac{3}{14} \cdot 3x(1+4z) + 2 \cdot \frac{2}{14} \cdot 2y(1+2x) + 2 \cdot \frac{6}{14} z \cdot (1+6y)$$

$$= \frac{1}{14}\left\{ 2x + \underline{20x^2} + \boxed{24y} + \underline{104y^2} + \boxed{36z} + \underline{90z^2} + 18x + 72xz \right.$$

$$\left. + \boxed{8y} + 16xy + \boxed{12z} + 72yz \right\}$$

$$= \frac{1}{14}\left\{ 20x^2 + 104y^2 + 90z^2 + 20x + 32y + 48z + 16xy \right.$$

$$\left. + 72xz + 72yz \right\}$$

luego E_{dd}

$\Rightarrow$

$$E_{dd} = \sqrt{1 + \frac{1}{7}\left\{ 20x^2 + 104y^2 + 90z^2 + 20x + 32y + 48z + 16xy + 72xz + 72yz \right\}} - 1$$

iii) para determinar la deformación angular entre el eje $\hat{x}$ y el eje $\hat{z}$ hay que calcular primero la deformación extensional en cada una de estas fibras.

$\hat{x} = (1,0,0)$ $\quad \hat{z} = (0,0,1)$.

$$E_{\hat{x}\hat{x}} = \sqrt{1 + 2(\varepsilon_{11})} - 1$$

$$= \sqrt{1 + 4x(1+10x)} - 1$$

$$E_{\hat{z}\hat{z}} = \sqrt{1 + 2\,\varepsilon_{33}} - 1$$

$$= \sqrt{1 + 8z + 20z^2} - 1$$

ahora como $\hat{x}$ y $\hat{z}$ son perpendiculares, la deformación angular esta dada por

$$\operatorname{sen}(\phi_{\hat{x}\hat{z}}) = \frac{2\,\hat{x}_i\,\hat{z}_j\,\varepsilon_{ij}}{(1 + E_{\hat{x}\hat{x}})(1 + E_{\hat{z}\hat{z}})}$$

luego $\hat{x}_i\,\hat{z}_j\,\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{13} = 3x(1+4z)$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}(\phi_{\hat{x}\hat{z}}) = \frac{6x(1+4z)}{\sqrt{(1+4x\{1+10x\})(1+8z+20z^2)}}}$$

iv) Si los valores de las constantes son la centésima parte de los valores originales, van a disminuir las amplitudes de los términos del tensor de Green (amplitudes en módulo) pero no se puede decir "en cuanto" o la razón en que disminuyen sin resolver el problema nuevamente ya que el tensor de Green no es lineal con respecto a los corrimientos. 8/8