P] Si los ejes coordenados son ejes principales de tensiones determinar

a) la componente normal σ_{nn} y la magnitud de la componente tangencial τ_n de un plano cuya normal vale $\hat{n} = n_1\hat{i} + n_2\hat{j} + n_3\hat{k}$

b) las componentes de un vector unitario $\hat{e}_t$ en el plano, tal que $\sigma_n = \sigma_{nn}\hat{n} + \tau_n \hat{e}_t$

Sol: como los ejes coordenados son ejes principales de tensiones se tiene que el tensor de tensiones se escribe como

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

donde σ_1, σ_2 y σ_3 son las tensiones principales.

luego el vector de tensiones en el plano de normal $\hat{n}$ es:

$$\sigma_{n_j} = n_i \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} n_1\sigma_1 \\ n_2\sigma_2 \\ n_3\sigma_3 \end{pmatrix}$$

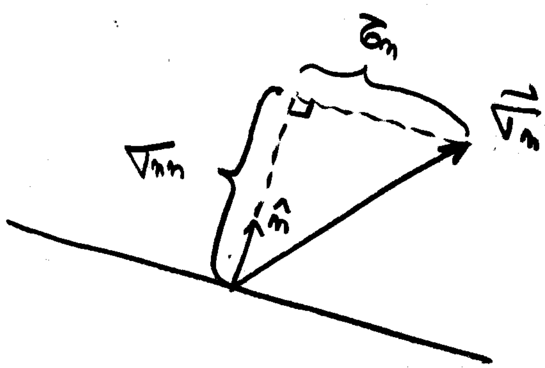
luego la componente normal del vector de tensiones en el plano se obtiene de proyectar $\vec{\sigma}_n$ sobre $\hat{n}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{nn} = \sigma_{n_i} \cdot n_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{nn} = n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2 + n_3^2 \sigma_3}$$

componente normal de las tensiones del plano.

la componente tangencial se obtiene por pitágoras



$$\Rightarrow \quad \|\vec{\sigma}_n\|^2 = \sigma_{nn}^2 + \tau_n^2$$

$$\Rightarrow \quad \tau_n^2 = \|\vec{\sigma}_n\|^2 - \sigma_{nn}^2$$

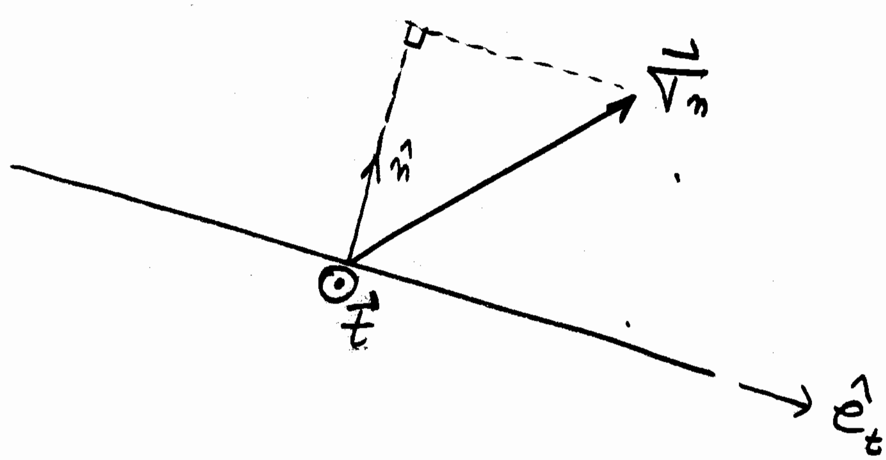
con $\|\vec{\sigma}_n\|^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2 + n_3^2 \sigma_3^2$

$$\Rightarrow \sigma_{nn}^2 = n_1^4 \sigma_1^2 + n_2^4 \sigma_2^2 + n_3^4 \sigma_3^2 + 2 n_1^2 n_2^2 \sigma_1 \sigma_2 + 2 n_1^2 n_3^2 \sigma_1 \sigma_3 + 2 n_2^2 n_3^2 \sigma_2 \sigma_3$$

$$\Rightarrow \tau_n^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2 + n_3^2 \sigma_3^2 - n_1^4 \sigma_1^2 - n_2^4 \sigma_2^2 - n_3^2 \sigma_3^2$$
$$+ 2 n_1^2 n_2^2 \sigma_1 \sigma_2 - 2 n_1^2 n_3^2 \sigma_1 \sigma_3 - 2 n_2^2 n_3^2 \sigma_2 \sigma_3$$

$$\Rightarrow \tau_n^2 = n_1^2 \sigma_1^2 (1 - n_1^2) + n_2^2 \sigma_2^2 (1 - n_2^2) + n_3^2 \sigma_3^2 (1 - n_3^2)$$
$$- 2 n_1^2 n_2^2 \sigma_1 \sigma_2 - 2 n_1^2 n_3^2 \sigma_1 \sigma_3 - 2 n_2^2 n_3^2 \sigma_2 \sigma_3$$

b) para que se cumpla la relación impongo que el vector $\hat{e}_t$ coincida con la proyección de $\vec{\sigma}_n$ sobre el plano



luego $\hat{e}_t$ se calcula como sigue:

$$\vec{t} = \vec{\sigma}_n \wedge \hat{n}$$

$$\Rightarrow \hat{e}_t = \frac{\hat{n} \wedge \vec{t}}{\|\hat{n} \wedge \vec{t}\|}$$

$$t_i = e_{ijk}\, \sigma_{nj} \cdot n_k .$$

$$\Rightarrow t_1 = e_{123}\, \sigma_{n2}\, n_3 + e_{132}\, \sigma_{n3}\, n_2$$

$$= n_2 \sigma_2 n_3 - n_3 \sigma_3 n_2$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 = n_2 n_3 (\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$t_2 = e_{231}\, \sigma_{n3}\, n_1 + e_{213}\, \sigma_{n1}\, n_3$$

$$\boxed{t_2 = n_1 n_3 (\sigma_3 - \sigma_1)}$$

$$t_3 = e_{312}\, \sigma_{n1}\, n_2 + e_{321}\, \sigma_{n2}\, n_1$$

$$\Rightarrow \boxed{t_3 = n_1 n_2 (\sigma_1 - \sigma_2)}$$

$$\Rightarrow \vec{t} = \begin{pmatrix} n_2 n_3 (\sigma_2 - \sigma_3) \\ n_1 n_3 (\sigma_3 - \sigma_1) \\ n_1 n_2 (\sigma_1 - \sigma_2) \end{pmatrix}$$

luego $(\hat{n} \wedge \vec{t})_i = e_{ijk}\, n_j\, t_k .$

$$
\begin{aligned}
(\hat{n} \wedge \vec{t})_1 &= e_{123}\, n_2 t_3 + e_{132}\, n_3 t_2 \\
&= n_1 n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2) - n_1 n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1) \\
&= n_1 \left(n_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2) - n_3^2 (\sigma_3 - \sigma_1) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\hat{n} \wedge \vec{t})_2 &= e_{231}\, n_3 t_1 + e_{213}\, n_1 t_3 \\
&= n_2 n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3) - n_2 n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2) \\
&= n_2 \left\{ n_3^2 (\sigma_2 - \sigma_3) - n_1^2 (\sigma_1 - \sigma_2) \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\hat{n} \wedge \vec{t})_3 &= e_{312}\, n_1 t_2 + e_{321}\, n_2 t_1 \\
&= n_3 n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1) - n_3 n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3) \\
&= n_3 \{ n_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1) - n_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)
\end{aligned}
$$

luego $\hat{e}_t = \dfrac{\hat{n} \wedge \hat{t}}{\|\hat{n} \wedge \hat{t}\|}$ (propuesto calcularlo).

P] Demostrar que si el tensor de tensiones σ_{ij} es simétrico entonces

$$\sigma_i^{1}\, n_i^{2} = \sigma_j^{2}\, n_j^{1}$$

donde $\sigma_i^{1} \triangleq$ tensión en el plano de normal n_i^{1}

$\sigma_i^{2} \triangleq$ tensión en el plano de normal n_i^{2}

Sol://

tenemos que

tensor σ_{ij} es simétrico

$$\sigma_i^{1} = n_j^{1}\,\sigma_{ji} = n_j^{1}\,\sigma_{ij}$$

luego

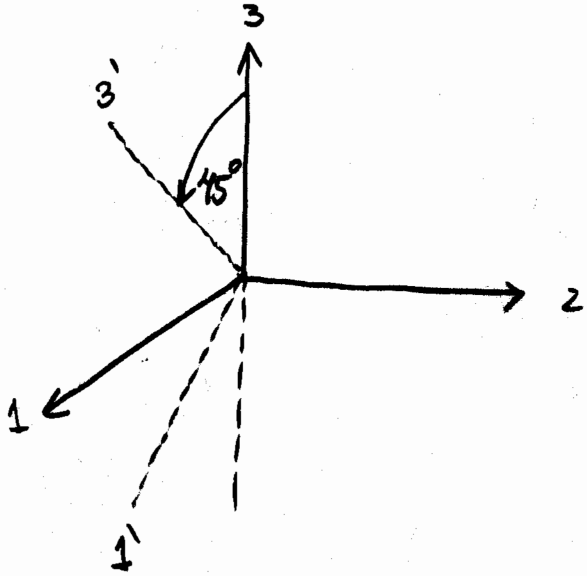
$$\begin{aligned}
\sigma_i^{1}\, n_i^{2} &= n_j^{1}\,\sigma_{ji}\, n_i^{2} \\
&= n_j^{1}\,\sigma_{ij}\, n_i^{2} \\
&= n_i^{2}\,\sigma_{ij}\, n_j^{1} \\
&= \sigma_j^{2}\, n_j^{1} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

P] Dado el estado de deformación en un punto de un cuerpo:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

a) Calcular la deformación unitaria de la fibra 3' (bisectriz interior de (1,3))

b) Calcular el ángulo entre las bisectrices 1' y 3'.



Sol:// Por los valores bajos de los componentes del tensor, del orden de 10^{-4}, se puede utilizar pequeñas deformaciones.

a) La dirección de la fibra 3' es

$$\hat{\lambda} = (1, 0, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

luego la deformación extensional en la dirección de la fibra 3' es

$$\varepsilon_{\lambda\lambda} = \lambda_i \lambda_j \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon_{13} + \frac{1}{2}\varepsilon_{31} + \frac{1}{2}\varepsilon_{33}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) = \frac{1}{2}(1-3)\cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\lambda\lambda} = -1\cdot 10^{-4}}$$ deformación unitaria de la fibra 3'.

b) Para calcular el ángulo primero hay que calcular la deformación extensional de la fibra 1'.
la dirección que define la fibra 1' es $\hat{\mu} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$

$$E_{\mu\mu} = \mu_i \mu_j \varepsilon_{ij} = +\frac{1}{2}\varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{13} - \frac{1}{2}\varepsilon_{31} + \frac{1}{2}\varepsilon_{33}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}(1 - 0 - 0 - 3)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\mu\mu} = -1\cdot 10^{-4}}$$

el ángulo, en el estado deformado, entre las direcciones $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mu}$ originalmente ortogonales. es.

$$\cos(90 - \phi_{\lambda\mu}) = \operatorname{sen}(\phi_{\lambda\mu}) = \frac{2\lambda_i \mu_j \varepsilon_{ij}}{(1+E_{\lambda\lambda})(1+E_{\mu\mu})}$$

$\hat{\lambda} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

$\hat{\mu} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$

$$\lambda_i \mu_j \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{13} + \frac{1}{2}\varepsilon_{31} - \frac{1}{2}\varepsilon_{33}$$

$$= \frac{1}{2}\{1 + 3\}\cdot 10^{-4} = 2\cdot 10^{-4}$$

luego

$$\operatorname{sen}(\phi_{\lambda\mathfrak{z}}) = \frac{2\lambda_i \mathfrak{z}_j \varepsilon_{ij}}{(1+E_{\lambda\lambda})(1+E_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}})} = \frac{4\cdot 10^{-4}}{(1-10^{-4})(1-10^{-4})}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\phi_{\lambda\mathfrak{z}}) \approx 4{,}0008\cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_{\lambda\mathfrak{z}} = 2{,}292\cdot 10^{-2}\,[^\circ]} \quad \left(\text{grados sexagesimales}\right)$$

pero $\phi_{\lambda\mathfrak{z}}$ es la disminución del ángulo entre los vectores $\hat{\lambda}$ y $\hat{\mathfrak{z}}$. Luego el ángulo final entre las direcciones $1'$ y $3'$ $(\hat{\mathfrak{z}}\ \text{y}\ \hat{\lambda})$ es

$$\boxed{90-\phi_{\lambda\mathfrak{z}} = 89{,}977[^\circ]}$$

P] Dado el campo de corrimientos

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} X_2 \cdot X_3 \\ X_3^2 \\ X_1^2 \end{pmatrix} \cdot A \quad \text{donde} \quad 0 < A \leq 1$$

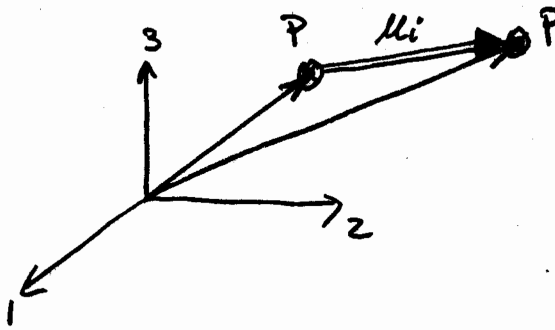
a) Encuentre las componentes del tensor de Cauchy ε_{ij} y las del tensor de rotación w_{ij}

b) Encuentre las deformaciones principales en el punto $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Previo a la resolución:

Para el análisis de la deformación se definió el tensor de Green. Su forma general expresada en función de los corrimientos es:

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}\, u_{k,j} \right)$$



u_i es el dato en este problema.

Para simplificar la utilización del tensor de Green, se puede utilizar las hipótesis de pequeñas deformaciones;

1) se exige que los corrimientos sean pequeños $|u_i| \ll 1$

2) se exige además pequeñas rotaciones $\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| = |u_{i,j}| \ll 1$

1) + 2) $\Rightarrow u_{k,i} \cdot u_{k,j} \longrightarrow 0$, con lo que se define, para pequeñas deformaciones, el tensor de Cauchy:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Notar que el tensor de Cauchy es un tensor simétrico ya que $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

El tensor de rotaciones se define como:

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j})$$

que es un tensor antisimétrico, ya que $w_{ij} = -w_{ji}$,

Es posible definir un vector equivalente

$$w_i = \frac{1}{2} e_{ijk} w_{jk} \left(= \begin{Bmatrix} w_{23} \\ w_{31} \\ w_{12} \end{Bmatrix} \right)$$

la relación inversa es:

$$\boxed{w_{ij} = e_{ijk} w_k}$$

El teorema de Helmholtz:

"Para pequeños deformaciones y rotaciones, el campo de corrimientos en una vecindad del punto P se puede descomponer en una traslación u_i^P, una rotación w_j y una deformación ε_{ij}".

__Dem/.__ Sea la función de corrimientos de un sólido u_i, la que evaluado en el punto $P(x_i)$ queda u_i^P. Como u_i es función del punto donde se quiere evaluar el corrimiento, el valor de esta función en un punto $Q(x_i + dx_i)$ al interior de una vecindad en torno al punto $P(x_i)$ queda dado por $u_i^q = u_i^P + du_i$. Ahora como $u_i = u_i(x_j)$, el cambio de la función corrimiento se puede expresar como $du_i = u_{i,j}\, dx_j$, luego:

$$u_i^q = u_i^P + du_i = u_i^P + u_{i,j}\, dx_j$$

pero $$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j})$$

$$= \varepsilon_{ij} - w_{ij}$$

{ Una función cualquiera se puede expresar como la superposición de una función par más una función impar

$$\Rightarrow u_i^q = u_i^p + \varepsilon_{ij}\, dx_j - w_{ij}\, dx_j$$
$$= u_i^p + \varepsilon_{ij}\, dx_j - e_{ijk} w_k\, dx_j$$
$$= u_i^p + \varepsilon_{ij}\, dx_j + e_{kji} w_k\, dx_j$$

$$\Rightarrow u_i^q = \underbrace{u_i^p}_{\text{Traslación}} + \underbrace{\varepsilon_{ij}\, dx_j}_{\text{deformación}} + \underbrace{e_{kji}\, w_k\, dx_j}_{\text{giro.}}$$

Solución al problema:

a) tenemos el siguiente campo de corrimientos

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= X_2 \cdot X_3 \cdot A \\ u_2 &= X_3^2 \cdot A \\ u_3 &= X_1^2 \cdot A \end{aligned}\right\}$$

con $|A| \ll 1 \Rightarrow$ pequeñas deformaciones y rotaciones

$\Rightarrow$ podemos usar el tensor de Cauchy.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Calculemos las derivadas de los corrimientos:

$u_{1,1} = 0$ $\qquad u_{1,2} = X_3 A$ $\qquad u_{1,3} = X_2 A$

$u_{2,1} = 0$ $\qquad u_{2,2} = 0$ $\qquad u_{2,3} = 2X_3 A$

$u_{3,1} = 2X_1 \cdot A$ $\qquad u_{3,2} = 0$ $\qquad u_{3,3} = 0.$

Si calculamos los componentes del tensor de Cauchy queda:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}\left(u_{1,1} + u_{1,1}\right) = u_{1,1} = 0$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3} = 0$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right) = \frac{X_3 \cdot A}{2}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(u_{1,3} + u_{3,1}\right) = \frac{(X_2 + 2X_1)A}{2}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2}\right) = \frac{2X_3 \cdot A}{2} = X_3 \cdot A.$$

luego el tensor de Cauchy queda:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & X_3/2 & \frac{X_2 + 2X_1}{2} \\ X_3/2 & 0 & X_3 \\ \frac{X_2 + 2X_1}{2} & X_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot A$$

las componentes del tensor de rotación $w_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{j,i} - u_{i,j}\right)$

- $w_{11} = w_{22} = w_{33} = 0$
- $w_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{2,1} - u_{1,2}\right) = -\frac{X_3 \cdot A}{2}$
- $w_{13} = \frac{1}{2}\left(u_{3,1} - u_{1,3}\right) = \frac{A}{2}\left(2X_1 - X_2\right)$
- $w_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{3,2} - u_{2,3}\right) = -X_3 \cdot A$

luego el tensor de rotación queda:

$$[w_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -X_3/2 & \frac{(2X_1 - X_2)}{2} \\ X_3/2 & 0 & -X_3 \\ -\frac{(2X_1 - X_2)}{2} & X_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot A$$

Propuesto: calcular el vector de rotación w_i.

b) ¿Deformaciones principales en el punto $\vec{x} = (1, 1, 0)^T$?

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$

luego el tensor de Cauchy evaluado en el punto queda:

$$[\varepsilon_{ij}]\Big|_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \quad \Big\{ \text{sólo hay deformación por corte.}$$

las deformaciones principales estan dadas por los valores propios del tensor de Cauchy

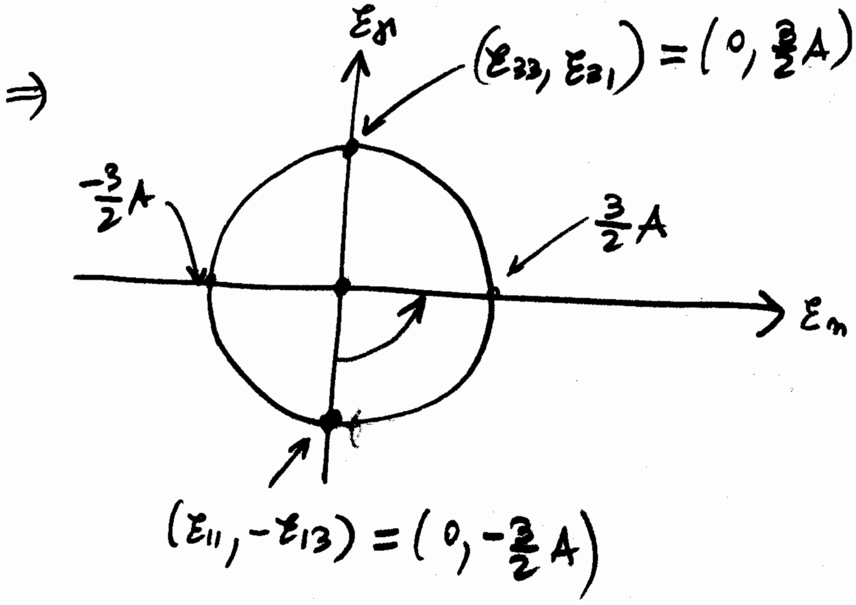
$$\left| [\varepsilon_{ij}]\big|_{\vec{x}} - \lambda I \right| = \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 3/2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 3/2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = -\lambda^3 + \frac{9}{4}\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\left(\frac{9}{4} - \lambda^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 3/2 \end{matrix} \;\Big|\; \lambda_3 = -3/2$$

luego las deformaciones principales son $\varepsilon_1 = 3/2 A$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = -3/2 A$

esto se puede ver claramente usando el círculo de MoHR de $[\varepsilon_{ij}]\big|_{\vec{x}}$. Como ε_{22} ya es una componente principal ya que $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$ tenemos que el problema se puede reducir a un problema "2D" ya que sólo basta realizar un giro en torno al eje "2" del sistema de coordenadas, tenemos.

$\Rightarrow$



aquí el radio se calcula directamente como $R = \frac{3}{2}A$.

luego como la coordenada del centro del círculo es $(\varepsilon_n, \varepsilon_\gamma) = (0, 0)$ tenemos que las deformaciones principales son $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}$, $\varepsilon_2 = 0$ y $\varepsilon_3 = -\frac{3}{2}A$, y se producen rotando el sistema de coordenadas en 45° en sentido antihorario

P] Demuestre que si ξ_{ij} es un tensor, entonces

$\xi_{r,i} \cdot \xi_{r,j}$ es también un tensor.

Sol://

Una expresión matemática es un tensor si éste transforma como tensor.

$\Rightarrow \quad t'_{ij} = a_{ik}\, a_{jl}\, t_{kl} \leftarrow$ t'_{ij} es tensor si satisface esta ley de transformación de coordenadas.

Ahora como $\xi_{i,j}$ es un tensor, este se puede escribir en un sistema de coordenadas transformado como:

$$\xi'_{i,j} = a_{ik}\, a_{jl}\, \xi_{k,l}$$

definamos $\phi_{ij} = \xi_{r,i}\, \xi_{r,j}$

$$\Rightarrow \phi'_{ij} = \xi'_{r,i}\, \xi'_{r,j}$$

$$= (a_{rk}\, a_{il}\, \xi_{k,l}) \cdot (a_{rm}\, a_{jn}\, \xi_{m,n})$$

$$= a_{rk} \cdot a_{rm} \cdot a_{il} \cdot a_{jn}\, \xi_{k,l}\, \xi_{m,n}$$

Pero como las filas (y las columnas) de a_{ij} son ortonormales $\Rightarrow$ $a_{rk} \cdot a_{rm} = \delta_{km}$

$$\Rightarrow \phi'_{ij} = \delta_{km}\, a_{il}\, a_{jn}\, \xi_{k,l}\, \xi_{m,n}$$

$$\Rightarrow \phi'_{ij} = a_{il}\, a_{jn}\, \xi_{k,l}\, \xi_{m,n} \cdot \delta_{km}$$

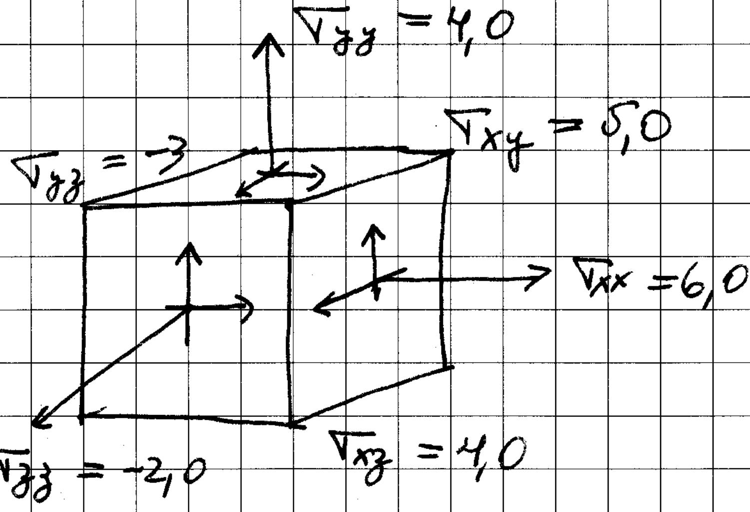
pero $\delta_{km}\, \xi_{m,n} = \xi_{k,n}$

$$\Rightarrow \phi'_{ij} = a_{il}\, a_{jn}\, \xi_{k,l}\, \xi_{k,n}$$

$$\Rightarrow \phi'_{ij} = a_{il}\, a_{jn}\, \phi_{ln}$$

$\Rightarrow \phi_{ij}$ es un tensor $\Rightarrow \xi_{k,l}\, \xi_{k,n}$ es un tensor. ∎

Dado el estado de tensiones en un punto de un sólido, se pide:



i) Establecer el tensor de tensiones correspondiente

ii) Determinar los invariantes principales

iii) Plantear la ecuación característica, y de ella obtener los valores propios

iv) Determinar los valores máximos de esfuerzos normal y corte

v) Dibujar los círculos de Mohr

vi) Verificar usando el diagrama de Mohr si la tensión en una superficie de normal

$$\hat{\nu} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1/\sqrt{2}\right) \text{ resulta factible}$$

Solución:

i)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 6,0 & 5,0 & 4,0 \\ 5,0 & 4,0 & -3,0 \\ 4,0 & -3,0 & -2,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Fecha / Date:

2/

ii) Invariantes principales

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & -3 \\ 4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \sigma_{ii} = 6 + 4 - 2 = 8$$

$$I_2 = \sigma_{ii}\,\sigma_{i+1}\,\sigma_{i+1} - \sigma_{i(i+1)}^2$$

$$= \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{13}^2$$

$$= 6\cdot 4 - 5^2 + (-)\cdot 4\cdot 2 - 3^2 + (-)\,2\cdot 6 - 4^2$$

$$= 24 - 25 - 8 - 9 - 12 - 16$$

$$= -46 \Rightarrow \boxed{I_2 = -46}$$

$$I_3 = \det(\sigma) = -236 \,//.$$

iii) Ecuación característica

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 8\lambda^2 + 46\lambda - 236 = 0.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 10{,}2415 \;;\; \lambda_2 = 3{,}8087 \;;\; \lambda_3 = -6{,}0502}_{\text{Valores propios}}$$

iv) luego las tensiones principales son (tensiones normales máximas).

$\sigma_1 = 10,2415$
$\sigma_2 = 3,8087$
$\sigma_3 = -6,0502$

} son las raíces de la ecuación característica

los esfuerzos de corte máximos se obtienen de la siguiente forma:

- En el plano (1,2)

$$\tau_{max\,1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{10,2415 - 3,8087}{2} = 3,2164$$

- En el plano (2,3)

$$\tau_{max\,2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{3,8087 + 6,0502}{2} = 4,9295$$

- En el plano (1,3)

$$\tau_{max\,1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{10,2415 + 6,0502}{2} = 8,1459$$

v) Dibujar los círculos de Mohr
→ Centros de los círculos

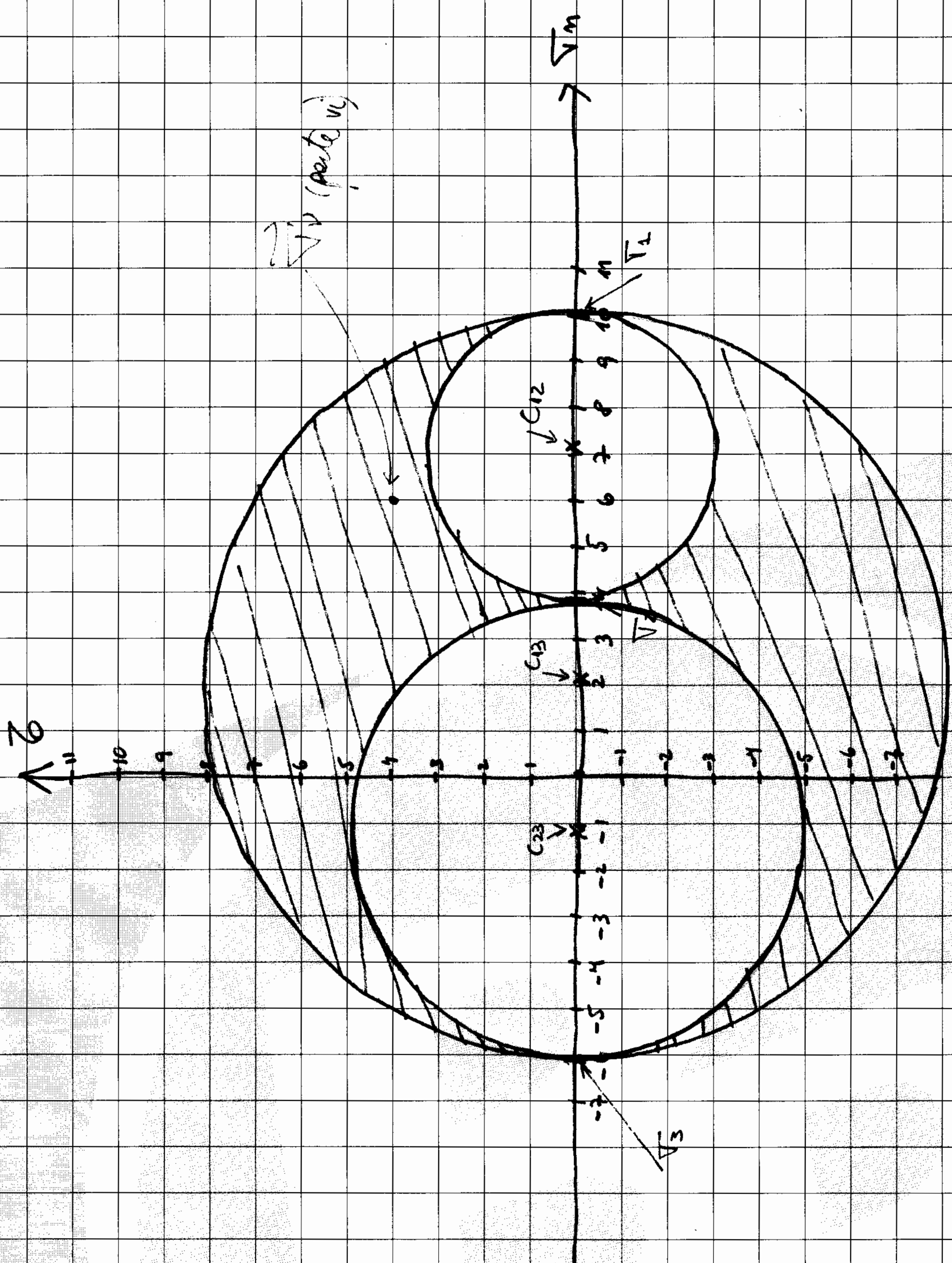
$$C_{12} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = 7,025 \; ; \; C_{23} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = -1,1208$$

$$C_{13} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = 2,0957$$

Fecha / Date:

4/

v) Dibujar los círculos de Mohr



Fecha / Date:

vi) $\hat{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{\sigma}_{\nu_i} = \nu_s \sigma_{si} \qquad (\|\hat{\nu}\| = 1)$

$$\vec{\sigma}_{\nu_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_{11} + \sigma_{31}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(6+4\right) = 10/\sqrt{2}$$

$$\vec{\sigma}_{\nu_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_{12} + \sigma_{32}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(5 + (-)3\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\sigma}_{\nu_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_{13} + \sigma_{33}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4 + (-)2\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

tensión normal al plano

$$\sigma_{\nu\nu} = \vec{\sigma}_\nu \cdot \hat{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(10 + 2\right) = \frac{12}{2} = \boxed{6 = \sigma_{\nu\nu}}$$

tensión tangencial

$$\|\sigma_{\nu t}\|^2 = \|\vec{\sigma}_\nu\|^2 - \|\sigma_{\nu\nu}\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(10^2 + 2^2 + 2^2\right) - 6^2 = 18 \Rightarrow \sigma_{\nu t} = \sqrt{18} = 4,24$$

$\Rightarrow \vec{\sigma}_\nu = 6\,\hat{\nu} + 4,24\,\hat{t}$ que es en la zona achurada del círculo de Mohr, luego es una tensión factible.

CEMENTOS BIO BIO