P] Se definen como "planos octaédricos" aquellos que forman ángulos iguales con los 3 ejes principales. Existen 8 de estos planos en un punto.

Demostrar que la tensión de corte τ_0 en un plano octaédrico esta dada por:

$$9\tau_0^2 = (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2$$

y que en términos de los invariantes de tensiones se tiene:

$$9\tau_0^2 = 2I_1^2 - 6I_2$$

Demostrar también que la tensión normal octaédrica vale $\frac{1}{3}I_1$.

Sol:// Recordemos primero cuales son los invariantes de un tensor t_{ij}

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

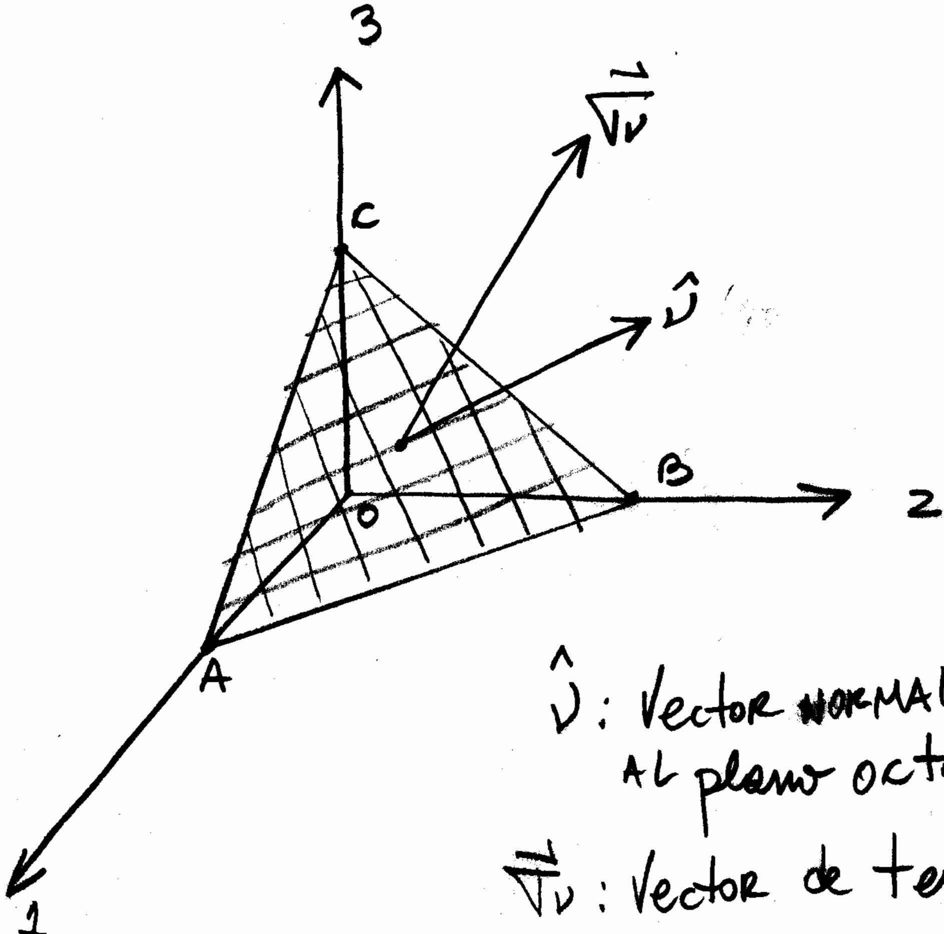
- $I_1 = t_{ii}$ = traza del tensor.
- $I_2 = \left|\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}\right| + \left|\begin{bmatrix} t_{22} & t_{23} \\ t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}\right| + \left|\begin{bmatrix} t_{33} & t_{31} \\ t_{13} & t_{11} \end{bmatrix}\right|$

$\Rightarrow I_2 = t_{ii}\, t_{(i+1)(i+1)} - t_{i(i+1)}^2$ ($\leftarrow$ si el tensor es simétrico)

- $I_3 = |t_{ij}| = e_{ijk}\, t_{1i}\, t_{2j}\, t_{3k}$

determinante

Volviendo al problema: tenemos un plano (plano octaédrico) que forma ángulos iguales con los 3 ejes principales:



$\hat{\nu}$: Vector normal, al plano octaédrico

$\vec{T}_\nu$: Vector de tensiones en el plano octaédrico

Como el plano octaédrico forma ángulos iguales con los 3 ejes principales, se tiene que la distancia entre los puntos de intersección del plano con los ejes principales (puntos A, B y C) con el origen es igual para los 3 puntos. Luego el vector normal a este plano es

$$\nu_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \left(\hat{\nu} = (1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Por otro lado, como el sistema de coordenados es el sistema definido por los 3 ejes principales del tensor σ_{ij}, el tensor σ_{ij} queda descrito por sus valores principales σ_1, σ_2 y σ_3, es decir

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

luego, el vector de tensiones en el plano octaédrico queda definido por

$$\sigma_{\nu_i} = \nu_j \sigma_{ji}$$

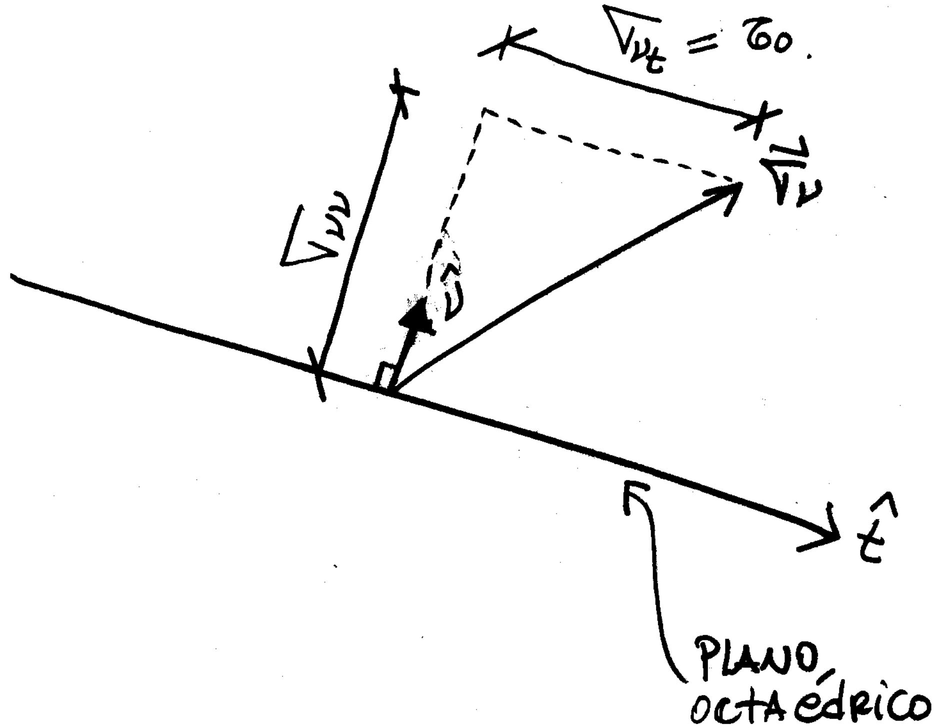
$$\Rightarrow \sigma_{\nu_1} = \nu_1 \sigma_{11} + \nu_2 \cancelto{0}{\sigma_{21}} + \nu_3 \cancelto{0}{\sigma_{31}} = \sigma_{\nu_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_1$$

$$\Rightarrow \sigma_{\nu_1} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}$$

Analogamente $\Rightarrow \sigma_{\nu_2} = \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{3}}$; $\sigma_{\nu_3} = \dfrac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$

luego $$\boxed{\vec{\sigma_\nu} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}$$ Vector de tensiones en el plano octaédrico

Si observamos el plano perpendicular al plano octaédrico que contiene al vector de tensiones $\vec{\sigma}_{\nu}$, podemos ver lo siguiente



donde
- $\hat{\nu}$ es el vector normal al plano octaédrico
- $\hat{t}$ es un vector tangente al plano octaédrico
- $\sigma_{\nu\nu}$ es la componente normal al plano octaédrico del vector $\vec{\sigma}_{\nu}$
- $\sigma_{\nu t}$ es la componente tangencial al plano octaédrico del vector $\vec{\sigma}_{\nu}$

luego $\sigma_{\nu\nu}$ se calcula proyectando el vector de tensiones $\vec{\sigma}_{\nu}$ sobre la normal al plano

$$\Rightarrow \sigma_{\nu\nu} = \nu_i \sigma_{\nu_i} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\nu\nu} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1$$

Ahora, para calcular la componente tangencial al plano ($\sigma_{\nu t}$) del vector de tensiones $\vec{\sigma}_\nu$, usamos el teorema de pitágoras:

$$\Rightarrow \quad \|\vec{\sigma}_\nu\|^2 = \sigma_{\nu\nu}^2 + \sigma_{\nu t}^2 \qquad (\text{Recordar que } \sigma_{\nu t} = \tau_0)$$

$$= \sigma_{\nu\nu}^2 + \tau_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \tau_0^2 = \|\vec{\sigma}_\nu\|^2 - \sigma_{\nu\nu}^2$$

donde

- $\|\vec{\sigma}_\nu\|^2 = \dfrac{\sigma_1^2}{3} + \dfrac{\sigma_2^2}{3} + \dfrac{\sigma_3^2}{3} = \dfrac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3}.$

- $\sigma_{\nu\nu}^2 = \dfrac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{9} = \dfrac{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 2\sigma_3(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_3^2}{9}$

$$= \frac{\sigma_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_3\sigma_1 + 2\sigma_3\sigma_2 + \sigma_3^2}{9}$$

$$= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{9}$$

luego

$$\tau_0^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{9} \quad \Big/ \cdot 9$$

$$9\tau_0^2 = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

$$= (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2) + (\sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{9\tau_0^2 = (\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

falta probar que $9\tau_0^2 = 2I_1^2 - 6I_2$

tenemos que $\tau_0^2 = \|\vec{\sigma}_\nu\|^2 - \sigma_{\nu\nu}^2$

$$\Rightarrow \tau_0^2 = \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}{3} - \frac{I_1^2}{9} \quad /\cdot 9$$

$$\Rightarrow 9\tau_0^2 = 3(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) - I_1^2$$

por otro lado

- $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
- $I_2 = \sigma_{ii}\,\sigma_{(i+1)(i+1)} - \cancel{\sigma_{i(i+1)}^2} \rightarrow 0.$

$$= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}$$

$$\Rightarrow I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

luego

$$3I_1^2 - 6I_2 = 3(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 - 6(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)$$

$$= 3(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 + \cancel{2(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)}) - \cancel{6(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)}$$

$$= 3(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)$$

$$\Rightarrow 9\tau_0^2 = 3I_1^2 - 6I_2 - I_1^2 \Rightarrow \boxed{9\tau_0^2 = 2I_1^2 - 6I_2}$$

P] Dado el tensor de tensiones

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine σ_0 de modo que el vector de tensiones en algún plano que contenga el punto sea nulo. Determine, además, el vector normal unitario que define dicho plano libre de tensiones.

sol.// Hay que encontrar σ_0 tal que el vector de tensiones sea nulo en algún plano, es decir que

$$\sigma_{\nu_j} = \nu_i \sigma_{ij} = 0.$$

de aquí obtenemos 3 ecuaciones, pero tenemos 4 incógnitas que son ν_1, ν_2, ν_3 y σ_0.

La cuarta ecuación la obtenemos de la normalización del vector normal al plano donde se evalúa el vector de tensiones:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$$

luego tenemos 4 ecuaciones y 4 incógnitas, por lo que podemos resolver el problema.

Veamos:

de $\nu_i T_{ij} = 0$ tenemos.

$$\nu_1 T_{11} + \nu_2 T_{21} + \nu_3 T_{31} = 0$$

$$\nu_1 T_{12} + \nu_2 T_{22} + \nu_3 T_{32} = 0$$

$$\nu_1 T_{13} + \nu_2 T_{23} + \nu_3 T_{33} = 0$$

Además

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$$

reemplazando tenemos las siguientes ecuaciones

$$\nu_2 + 2\nu_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\nu_1 + T_0 \nu_2 + \nu_3 = 0 \qquad (2)$$

$$2\nu_1 + \nu_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \qquad (4)$$

de (1) $\Rightarrow \nu_3 = -\dfrac{\nu_2}{2}$

de (3) $\Rightarrow \nu_1 = -\dfrac{\nu_2}{2}$

luego reemplazando (1) y (3) en (2)

$$\Rightarrow -\frac{\nu_2}{2} + \nabla_0 \nu_2 - \frac{\nu_2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \nu_2\left(-\frac{1}{2} + \nabla_0 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \nu_2(\nabla_0 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \nu_2 = 0 \lor \nabla_0 = 1$$

pero $\nu_2 \neq 0$ ya que si $\nu_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nu_3 = -\frac{\nu_2}{2} = 0 \\ \nu_1 = -\frac{\nu_2}{2} = 0 \end{cases}$ $\times$

lo que no es posible ya que no se cumpliría la ecuación (4)

luego $\boxed{\nabla_0 = 1}$

ahora hay que encontrar ν_i, para ello reemplazamos las ecuaciones (1) y (3) en la ecuación (4)

$$\Rightarrow \left(-\frac{\nu_2}{2}\right)^2 + \nu_2^2 + \left(-\frac{\nu_2}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \nu_2^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \nu_2^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \nu_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ luego de (1) y (3)} \Rightarrow \begin{cases} \nu_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \nu_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

luego $\boxed{\nu_1 = -\sqrt{\frac{1}{6}} \,;\, \nu_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \,;\, \nu_3 = -\sqrt{\frac{1}{6}} \quad \nabla_0 = 1}$