

CI 41A - HIDRAULICA

Prof. ALDO TAMBURRINO

METODOS SIMPLIFICADOS DE SOLUCION DE
LAS ECUACIONES PARA EL ESCURRIMIENTO
IMPERMANENTE EN TUBERIAS.

Las ecuaciones del movimiento impermanente en tuberías son:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Ecuación de momento:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + f \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema de dos ecuaciones a derivadas parciales, las que junto a las condiciones de borde e inicial permiten resolver el problema, es decir, determinar p y v .

En general, el sistema no tiene soluciones analíticas, por lo que, antes de disponer de computadores, las Ecs. 1 y 2 se simplificaban de alguna manera y eran resueltas mediante algún método algebraico,

gráficos o analíticos. Estos métodos, sin embargo, no permiten resolver sistemas de tuberías complejas o en los que las condiciones de borde sean complicadas. Con la disponibilidad de computadores, los métodos numéricos se han popularizado y prácticamente no existen limitaciones en el tipo o complejidad de los sistemas a resolver, sin necesidad de simplificar los términos no lineales, como se hacía en los métodos anteriores.

Para el análisis que sigue, las Ecs. 1 y 2 se expresarán en forma adimensional. Consideremos las variables sin dimensiones

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\gamma H_0}, \quad v^* = \frac{v}{v_0}, \quad t^* = \frac{t}{L/a}$$

en las que L es una longitud (en la dirección del flujo) característica del problema, v_0 es la velocidad del flujo en la situación permanente inicial y H_0 es la carga asociada a v_0 .

Reemplazando en la Ec. 1:

$$\frac{\gamma H_0}{L/a} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + v_0 v^* \frac{\gamma H_0}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \rho a^2 \frac{v_0}{L} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = 0$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{v_0}{a} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\rho a v_0}{\gamma H_0} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = 0$$

En general $\frac{v_0}{a} \ll 1$. Se define la "constante de Atievi" al término $B = \frac{a}{g} \frac{v_0}{H_0}$.

De este modo, la ecuación de continuidad se reduce a:

$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*} = -B \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \quad (3)$$

Analizemos ahora la ecuación de momento. Definamos un diámetro adimensional de la tubería $D^* = \frac{D}{D_0}$. Reemplazando en la Ec. 2:

$$\frac{v_0}{L/a} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{v_0^2 v^*}{L} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\rho H_0}{\rho L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + g \sin \theta + f \frac{v_0^2}{D_0} \frac{v^* |v^*|}{2 D^*} = 0$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{v_0}{a} v^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{g H_0}{\rho a} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{L g}{\rho a} \sin \theta + f \frac{v_0 L}{a D_0} \frac{v^* |v^*|}{2 D^*} = 0$$

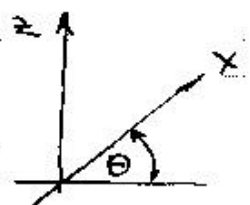
Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{\rho L}{\gamma H_0} = \frac{L}{g H_0}$, queda:

$$\frac{v_0 a}{g H_0} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{v_0^2}{g H_0} \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{L}{H_0} \sin \theta + \frac{f L}{g H_0} \frac{v_0^2}{2 D_0} \frac{v^* |v^*|}{D^*} = 0 \quad (4)$$

La presión motriz está definida como:

$$\hat{p} = p + \rho g z$$

donde z es un eje vertical, positivo hacia arriba, el que se adimensionaliza con:



$$z^* = \frac{z}{L}$$

Luego, $\hat{p} = \rho H_0 p^* + \rho L z^*$

Se define la presión motriz adimensional como:

$$\hat{p}^* = \frac{\hat{p}}{\rho H_0} = p^* + \frac{L}{H_0} z^*$$

de donde: $\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} = \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{L}{H_0} \frac{\partial z^*}{\partial x^*}$

Notar que $\frac{\partial z^*}{\partial x^*} = \sin \theta$.

Se definen, además, los siguientes parámetros adimensionales:

$$F = \frac{U_0^2}{g H_0}, \quad \alpha = f \frac{L}{g H_0} \frac{U_0^2}{D_0^2}$$

De este modo, la Ec. 4 puede escribirse como:

$$B \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + F \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x^*} + \alpha \frac{v^* |v^*|}{D^*} = 0$$

Considerando F y α pequeños, la ecuación de momentum se simplifica,

quedando como

$$B \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0 \quad (5)$$

Notar que $\hat{p}^* = p^* + \gamma L z^*$

$$\frac{\partial \hat{p}^*}{\partial t^*} = \frac{\partial p^*}{\partial t^*}$$

por lo que la ecuación de continuidad puede escribirse como:

$$B \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial t^*} = 0 \quad (3')$$

Es fácil demostrar que las Ecs (3') y 5 corresponden a ecuaciones de onda para v^* y \hat{p}^* . Derivando la ecuación de continuidad respecto a t^* y restando la ecuación de momentum derivada con respecto a x^* resulta:

$$B \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial t^*} + \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial t^{*2}} - B \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial x^{*2}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial t^{*2}} = \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial x^{*2}} \quad (6)$$

Del mismo modo, derivando ahora continuidad con respecto a x^* , momentum con respecto a t^* y restando:

$$B \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial x^* \partial t^*} - B \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} - \frac{\partial^2 \hat{p}^*}{\partial t^* \partial x^*} = 0$$

Resultado:
$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} \quad (7)$$

Las ecuaciones 6 y 7 corresponden a las ecuaciones de onda. D'Alembert (1717-1783) demostró que admiten soluciones del tipo (demostrar):

$$\hat{p}^* = G(t^* + x^*) + H(t^* - x^*) + \hat{p}_0$$

$$v^* = -\frac{1}{B} [G(t^* + x^*) - H(t^* - x^*)] + v_0^*$$

Las funciones, G y H dependen de las condiciones de borde.

Basándose en las ecuaciones anteriores, Akiyuki (1902) derivó un método algebraico de solución. Posteriormente, Bergeron (1931) ideó un método gráfico de solución, en el que se pueden incluir las pérdidas de energía.