

VELOCIDAD DE PROPAGACION DE ONDAS SUPERFICIALES PLANAS

Consideremos un líquido en reposo con su superficie libre a una distancia h de un fondo plano, como se esquematiza en la Fig.1.

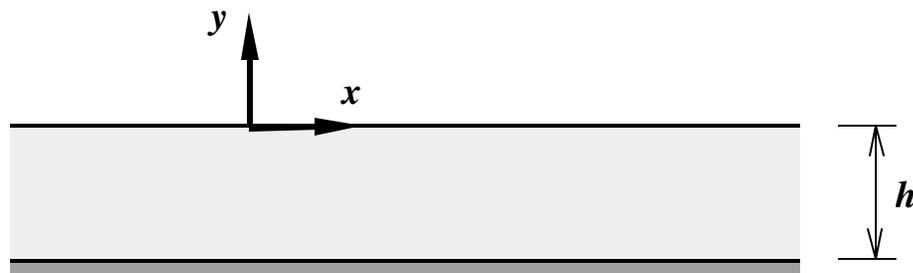


Fig. 1

Si externamente se perturba la superficie, ésta se deformará y, debido a la acción de la gravedad, variará en el tiempo. Llamando h el desplazamiento vertical de la superficie libre en una posición x para un tiempo t , la situación perturbada es como la indicada en la Fig. 2. El problema consiste en determinar cómo se propaga la perturbación cuando ella es pequeña.

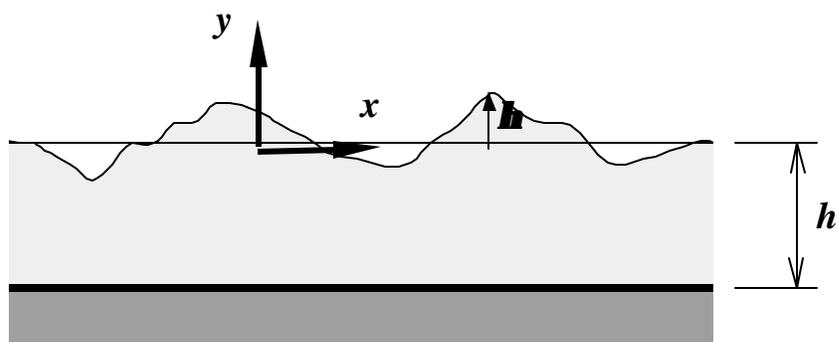


Fig. 2

Consideremos que el movimiento del fluido es irrotacional. Recordando lo estudiado a finales del curso de Mecánica de Fluidos (ver Anexo), el problema consiste en resolver la ecuación de Laplace para la función potencial \mathcal{F} con las condiciones de borde apropiadas:

$$\nabla^2 \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

Resolviendo la Ec. 1, es posible determinar el campo de velocidades en la masa de fluido. La presión se obtiene a partir de la ecuación de Bernoulli (impermanente). Las condiciones de borde se aplican en el fondo ($y = -h$) y en la superficie libre ($y = \mathbf{h}$).

En el fondo no existe velocidad según y ($v = 0$), luego:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = 0, \quad \text{en } y = -h \quad (2)$$

En la superficie libre existen dos condiciones: una cinemática y otra dinámica. El movimiento vertical de las partículas de la superficie libre está dado por:

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = v$$

La posición de la superficie libre es función de x y t , por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} &= v, \quad \text{en } y = \mathbf{h} \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}, \quad \text{en } y = \mathbf{h} \end{aligned} \quad (3)$$

La condición dada por la relación anterior constituye la condición de borde cinemática, ya que involucra sólo desplazamientos y velocidad. La condición de borde dinámica es la que resulta de imponer que en la superficie libre la presión es cero:

$$p = 0, \quad \text{en } y = \mathbf{h}$$

En un flujo irrotacional, la presión se liga con la velocidad mediante la ecuación de Bernoulli, que para el caso impermanente establece que:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + B = F(t)$$

Eligiendo el nivel de referencia en $y = 0$, el Bernoulli está dado por:

$$B = \mathbf{h} + \frac{V^2}{2g}$$

Luego, la condición dinámica se expresa como:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{h} + \frac{1}{2g} (\nabla \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{f}) = F(t), \quad \text{en } y = \mathbf{h} \quad (4)$$

La resolución de la Ec. 1 con las condiciones de borde dadas por las Ecs. 2, 3 y 4 es difícil de abordar, dados los términos no lineales de las Ecs. 3 y 4. Sin embargo, al considerar perturbaciones de pequeña amplitud, es posible simplificar el problema al eliminar los términos no lineales. Llamando \mathbf{l} a la longitud de onda, una perturbación de pequeña amplitud quiere decir que $|\mathbf{h}| \ll \mathbf{l}$ y que $|\mathbf{h}| \ll h$. Que el desplazamiento sea pequeño respecto a la longitud de onda implica que la pendiente de la superficie libre es pequeña, o sea $\partial \mathbf{h} / \partial x$ es pequeño. Desplazamientos pequeños de la superficie libre inducen velocidades pequeñas en el fluido, por lo que $u = \partial \mathbf{f} / \partial x$ y $v = \partial \mathbf{f} / \partial y$ serán pequeños. De este modo, es posible despreciar el término $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x}$ de la Ec. 3, y el término $\nabla \mathbf{f} \cdot \nabla \mathbf{f}$ de la Ec. 4, quedando el problema reducido a :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

con las condiciones de borde:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = 0, \quad \text{en } y = -h \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}, \quad \text{en } y = \mathbf{h} \quad (7)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{h} = F(t), \quad \text{en } y = \mathbf{h} \quad (8)$$

$F(t)$ no es más que una constante de integración por lo que , sin perder generalidad puede ser absorbida dentro de la función \mathbf{f} si se define una función $G = -\int F(t) dt$. De este modo, se puede formar una nueva función potencial \mathbf{f}_1 , dada por

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f} + G$$

la que satisface:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} - F, \quad \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}, \quad \nabla^2 \mathbf{f}_1 = \nabla^2 \mathbf{f}$$

Luego, en términos de la nueva función, el problema a resolver es:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}_1}{\partial y^2} = 0 \quad (5a)$$

con las condiciones de borde

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} = 0, \quad \text{en } y = -h \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y}, \quad \text{en } y = \mathbf{h} \quad (7a)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + \mathbf{h} = 0, \quad \text{en } y = \mathbf{h} \quad (8a)$$

Supongamos ahora que la deformación es sinusoidal y está dada por

$$\mathbf{h} = \mathbf{e} \operatorname{sen} \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} (x - ct) \right) \quad (9)$$

donde \mathbf{e} es la amplitud de la deformación, la que debe ser pequeña, o sea $\mathbf{e} \ll \mathbf{l}$ y $\mathbf{e} \ll h$. El haber elegido una deformación dada por la Ec. 9 no es ninguna restricción al problema, ya que sabemos que mediante series de Fourier es posible expresar cualquier forma que tome la superficie libre como una suma de senos y cosenos. En la Ec. 9, c corresponde a la celeridad de la onda, o sea la velocidad con que se propaga la deformación de la superficie en la dirección x . Es lógico preguntarse si existe alguna dependencia de c con los parámetros que definen la forma de la onda (\mathbf{e} y \mathbf{l}) y la profundidad del flujo (h), o si la celeridad es un parámetro independiente de ellos. Para responder la pregunta debemos resolver la Ec. 5a con la condición de borde dada por la Ec. 6a y las condiciones definidas por las Ecs. 7a y 8a transformadas en:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = -\mathbf{e} \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} c \cos \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} (x - ct) \right), \quad \text{en } y = \mathbf{h} \quad (7b)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} = -\mathbf{e} \operatorname{sen} \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} (x - ct) \right), \quad \text{en } y = \mathbf{h} \quad (8b)$$

La solución de la Ec. 5a con las condiciones de borde dada por las Ecs. 6a, 7b y 8b puede obtenerse mediante el método de separación de variable, resultando:

$$\mathbf{f}_1 = \cos \left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} (x - ct) \right) \left[C_1 \operatorname{senh} \left(\frac{2\mathbf{p}y}{\mathbf{l}} \right) + C_2 \operatorname{cosh} \left(\frac{2\mathbf{p}y}{\mathbf{l}} \right) \right] \quad (10)$$

La condición de borde en el fondo permite obtener una relación entre C_1 y C_2 :

En $y = -h$, $\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} = 0$, se traduce en la siguiente relación:

$$\cos\left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}}(x - ct)\right) \left[C_1 \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}} \cosh\left(\frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{I}}\right) - C_2 \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}} \sinh\left(\frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{I}}\right) \right] = 0 \quad (11)$$

Como la condición debe satisfacerse para cualquier x y t , resulta que el término en paréntesis cuadrado debe ser nulo, resultando

$$C_1 = C_2 \operatorname{tgh}\left(\frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{I}}\right) \quad (12)$$

Reemplazando Ec. 12 en Ec. 10:

$$\mathbf{f}_1 = C_2 \cos\left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{I}}(x - ct)\right) \left[\operatorname{tgh}\left(\frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{I}}\right) \sinh\left(\frac{2\mathbf{p}y}{\mathbf{I}}\right) + \cosh\left(\frac{2\mathbf{p}y}{\mathbf{I}}\right) \right] \quad (13)$$

Para aplicar la condición dinámica conviene expresar \mathbf{h} de la Ec. 8a en términos de \mathbf{f}_1 . Haciendo $d(\text{Ec.8a})/dt$:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_1}{\partial t^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} u + \frac{d\mathbf{h}}{dt} = 0, \quad \text{en } y = \mathbf{h}$$

Reemplazando $u = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x}$ y $\frac{d\mathbf{h}}{dt} = v = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y}$ en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_1}{\partial t^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} = 0$$

Como la velocidad es pequeña, podemos despreciar el término no lineal, quedando finalmente:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} = 0, \quad \text{en } y = \mathbf{h} \quad (14)$$

Reemplazando Ec. 13 en la condición dada por la Ec. 14, e imponiendo que cuando $\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{I}} \ll 1$, $\sinh \approx 0$ y $\cosh \approx 1$, resulta

$$C_2 \cos\left(\frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}}(x-ct)\right) \left[-\left(\frac{2\mathbf{p}c}{\mathbf{l}}\right)^2 + g \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{l}}\right) \right] = 0 \quad (15)$$

Como la Ec. 15 debe ser válida para cualquier x y t , nuevamente el término en paréntesis cuadrado debe ser nulo, o sea:

$$\left(\frac{2\mathbf{p}c}{\mathbf{l}}\right)^2 = g \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{l}}\right)$$

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{\mathbf{l}}{2\mathbf{p}h} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{l}}\right) \quad (16)$$

La ec. 16 indica la relación entre la celeridad de la onda con su longitud y la altura de la masa de agua, y es válida si $\mathbf{e} \ll \mathbf{l}$ y $\mathbf{e} \ll h$. Dado que en la Ec. 16 aparece el cociente \mathbf{l}/h , podemos analizar dos casos límites: $\mathbf{l} \gg h$ y $h \gg \mathbf{l}$.

Si $\mathbf{l} \gg h$, $\operatorname{tgh}\left(\frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{l}}\right) \approx \frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{l}}$, por lo que la Ec. 16 queda:

$$\frac{c^2}{gh} = 1 \quad (17)$$

O sea, la velocidad de propagación de una onda infinitesimal en una masa de fluido de profundidad h (finita), está dada por:

$$c = \sqrt{gh} \quad (18)$$

Notar que este resultado también es aplicable si el fluido se mueve con una velocidad U en la dirección x , ya que el problema no cambia si se analiza respecto a un sistema de coordenadas que se mueve con velocidad U (c es una velocidad relativa al flujo).

La otra situación límite corresponde a $h \gg \mathbf{l}$. En este caso $\operatorname{tgh}\left(\frac{2\mathbf{p}h}{\mathbf{l}}\right) \approx 1$, quedando la Ec. 16 como

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{\mathbf{l}}{2\mathbf{p}h}$$

$$\frac{c^2}{g\mathbf{l}} = \frac{1}{2\mathbf{p}} \quad (19)$$

O sea, en aguas profundas, la celeridad de la onda depende sólo de su longitud. Éste es un resultado de interés en hidráulica marítima.

ANEXO: REPASO DE FLUJO POTENCIAL (CI 31A)

Un flujo irrotacional está definido por

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad (A1)$$

y existe una función escalar \mathbf{f} , llamada función potencial, tal que

$$\vec{V} = \nabla \mathbf{f} \quad (A2)$$

Es fácil ver que en dos dimensiones se tiene:

$$u = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \quad (A3)$$

La ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, en términos de la función potencial se expresa como:

$$\nabla^2 \mathbf{f} = 0 \quad (A4)$$

La solución de la Ec. A4 con las condiciones de borde adecuadas permite conocer el campo de velocidades.

La ecuación del movimiento del fluido puede escribirse como:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla B = 0 \quad (A5)$$

donde $B = z + \frac{p}{\mathbf{g}} + \frac{V^2}{2g}$ es la suma de Bernoulli. Usando la Ec. A2:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{f} + \nabla \left(z + \frac{p}{\mathbf{g}} + \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

$$\nabla \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + z + \frac{p}{\mathbf{g}} + \frac{V^2}{2g} \right) = 0$$

Al integrar sobre todo el espacio, resulta que

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + z + \frac{p}{\mathbf{g}} + \frac{V^2}{2g} = F(t) \quad (\text{A6})$$