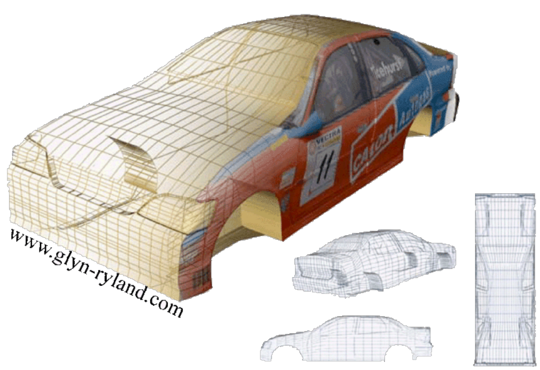
CC-52B Computación Gráfica

Patricio Inostroza

pinostro@dcc.uchile.cl

Geometría Tridimensional

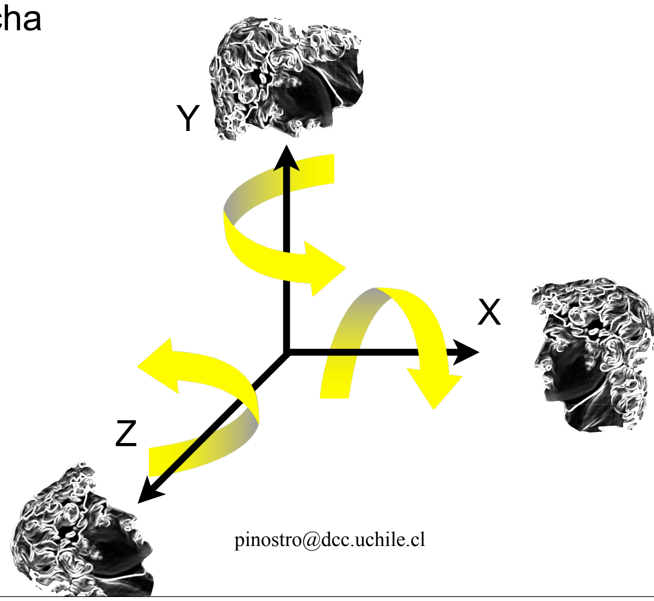
- Gran parte de los problemas de ingeniería son 3D



- Independiente de su representación 3D, hay que realizar un 'mapeo' a 2D

Geometría Tridimensional

- Sistema de coordenadas (WC)
  - El sentido queda definido por la regla de la mano derecha

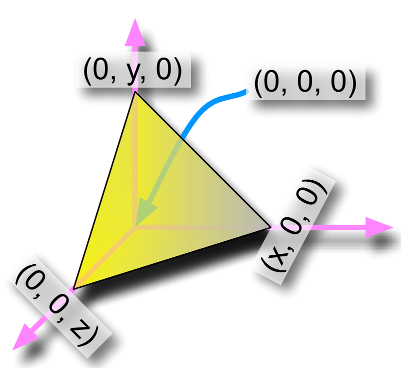


Geometría Tridimensional

- Representación de un objeto 3D
  - En coordenadas homogéneas

tetraedro

$$P = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Geometría 3D: Transformaciones

- Las transformaciones 3D son equivalentes a las transformaciones 2D
- Matriz de transformación en coordenadas homogéneas:

Escalamiento
Rotación
Shearing
Reflexión

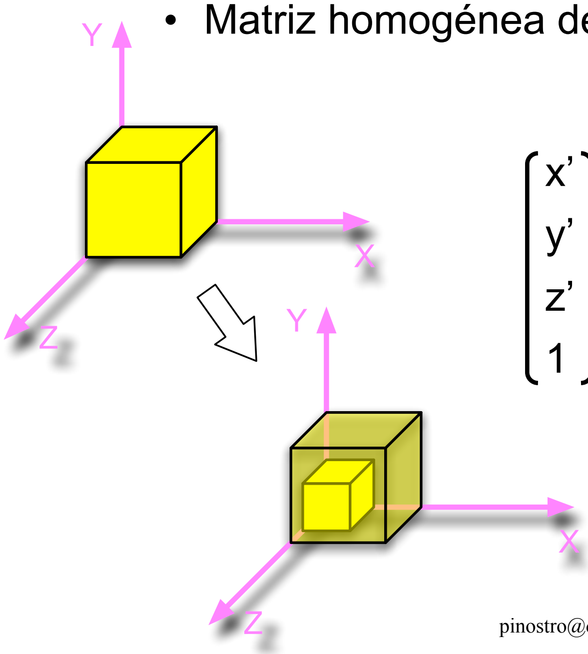
$$\begin{pmatrix} A & B & C & TX \\ D & E & F & TY \\ G & H & I & TZ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Traslación

Transformación en perspectiva

Geometría 3D: Escalamiento

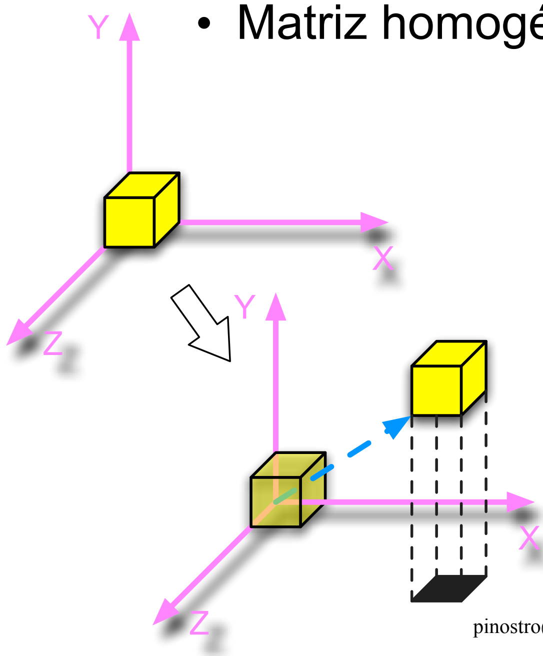
- Matriz homogénea de escalamiento:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geometría 3D: Traslación

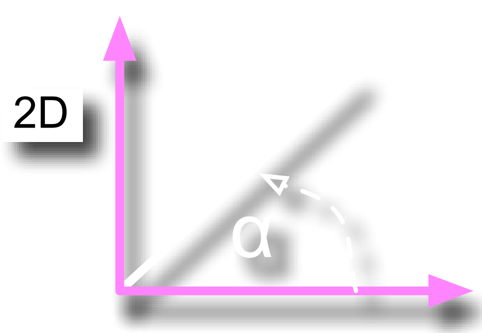
- Matriz homogénea de traslación:

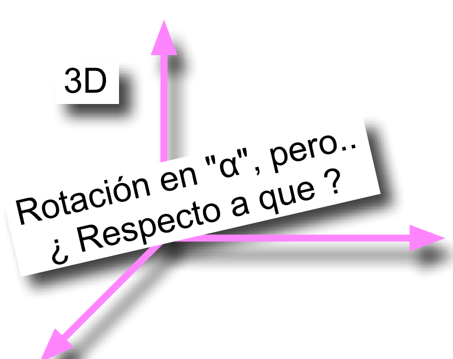


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & 0 & Ty \\ 0 & 0 & 1 & Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geometría 3D: Rotación

- En 2D la rotación es “natural”, acotada
- Pero en 3D hay más libertad...

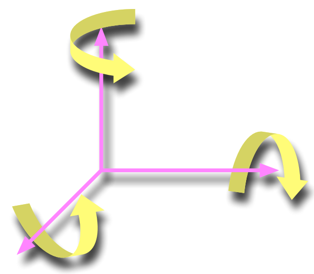




Geometría 3D: Rotaciones

- De mayor complejidad que en 2D
- Debe especificarse uno de los ejes de rotación: X, Y ó Z.

Rotaciones positivas (cw)

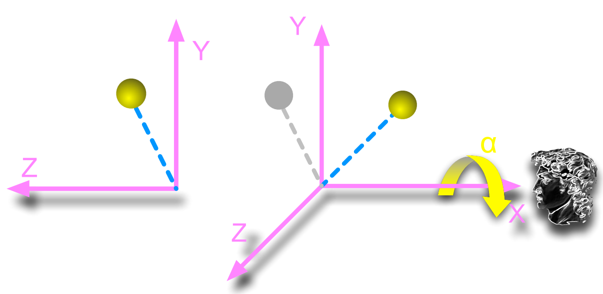


- Rotación c/r a un eje arbitrario es una descomposición de rotaciones simples c/r a los tres ejes principales

Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor del eje x

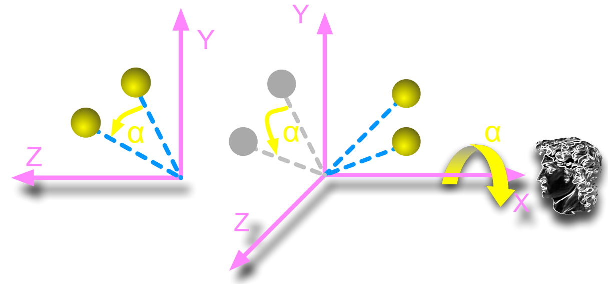
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor del eje x

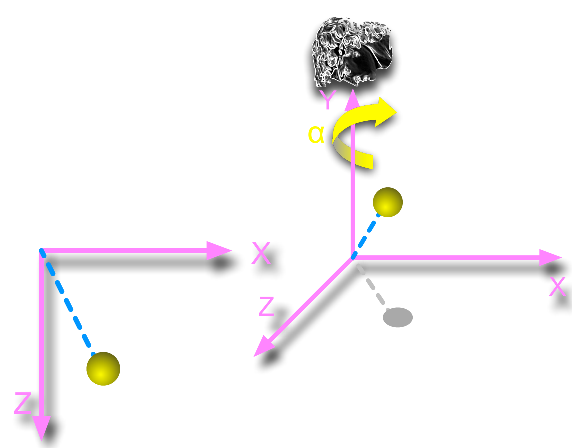
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor del eye y

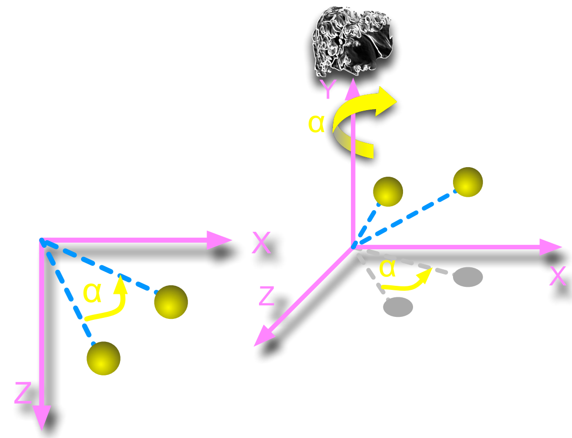
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor del eye y

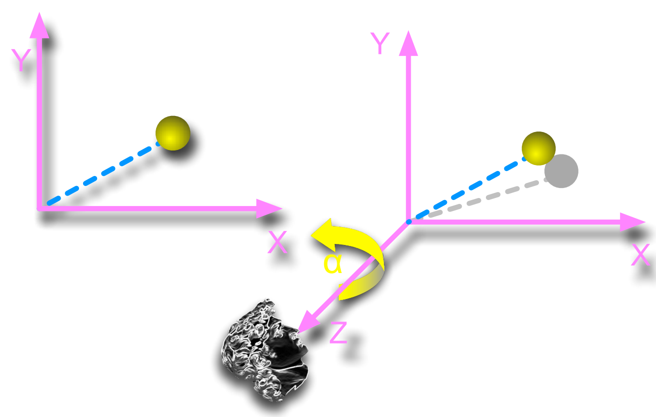
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor del eje z

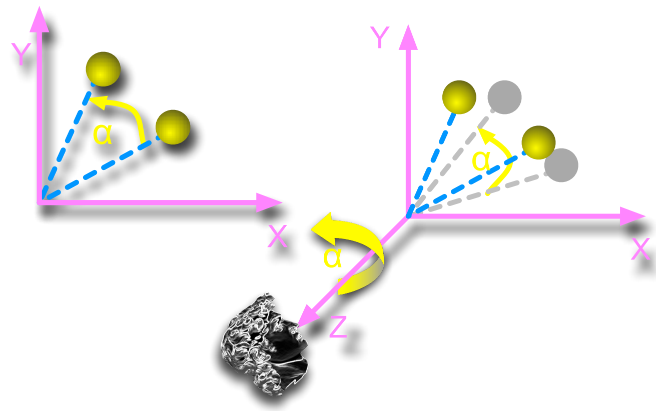
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Geometría 3D: Rotaciones

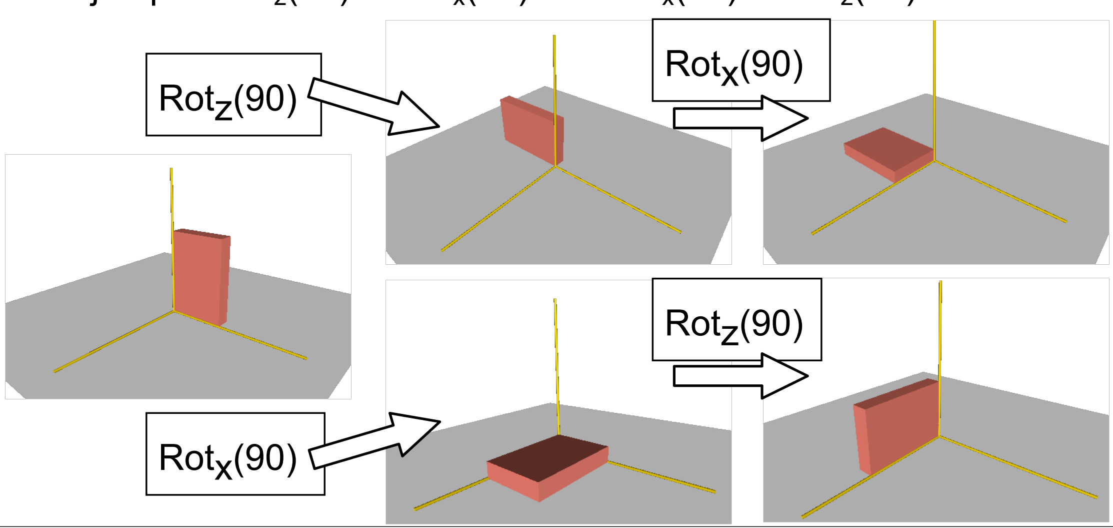
- Rotación alrededor del eje z

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Geometría 3D: Rotaciones

- Observación:
  – El orden en que se aplican las rotaciones afecta el resultado
- Ejemplo: $Rot_z(90) \rightarrow Rot_x(90)$ v/s $Rot_x(90) \rightarrow Rot_z(90)$

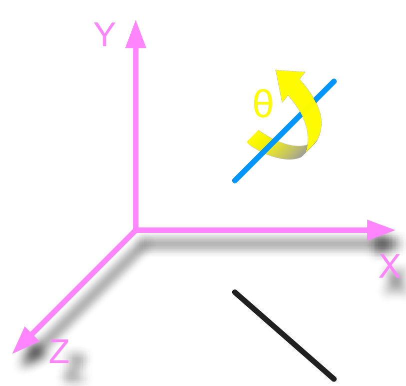


Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  1. Trasladar el eje arbitrario al origen
  2. Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  3. Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  4. Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  5. Aplicar la traslación inversa

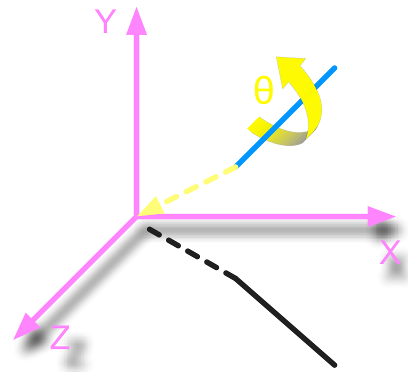
Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  1. Trasladar el eje arbitrario al origen
  2. Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  3. Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  4. Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  5. Aplicar la traslación inversa



Geometría 3D: Rotaciones

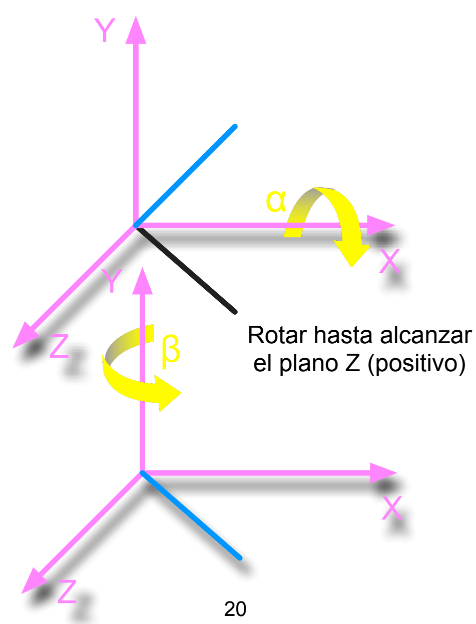
- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  1. Trasladar el eje arbitrario al origen
  2. Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  3. Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  4. Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  5. Aplicar la traslación inversa



M = T(–dx, –dy, –dz)

Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  1. Trasladar el eje arbitrario al origen
  2. Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  3. Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  4. Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  5. Aplicar la traslación inversa

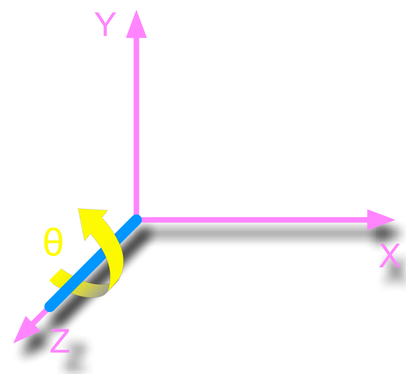


M = Rotx(–α) * T(–dx, –dy, –dz)

M = Roty(β) * Rotx(–α) * T(–dx, –dy, –dz)

Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  1. Trasladar el eje arbitrario al origen
  2. Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  3. Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  4. Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  5. Aplicar la traslación inversa



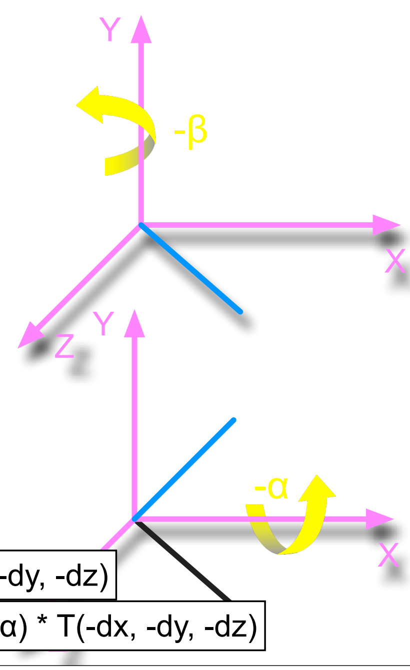
M = Rotz(θ) * Roty(β) * Rotx(α) * T(-dx, -dy, -dz)

.cl

21

Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  1. Trasladar el eje arbitrario al origen
  2. Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  3. Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  4. Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  5. Aplicar la traslación inversa

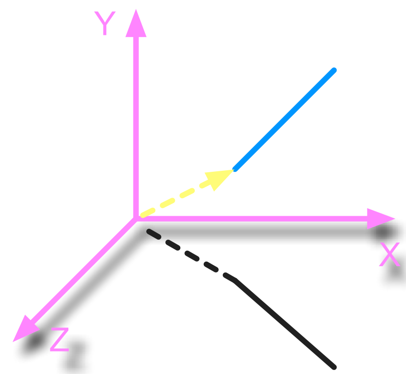


M = Roty(–β) * Rotz(φ) * Roty(β) * Rotx(α) * T(-dx, -dy, -dz)

M = Rotx(–α) * Roty(–β) * Rotz(φ) * Roty(β) * Rotx(α) * T(-dx, -dy, -dz)

Geometría 3D: Rotaciones

- Rotación alrededor de un eje arbitrario
  1. Trasladar el eje arbitrario al origen
  2. Rotar el eje alrededor de los ejes X e Y hasta alinear el eje arbitrario con Z positivo
  3. Rotar alrededor del eje Z en el ángulo deseado
  4. Aplicar las rotaciones inversas alrededor de los ejes X e Y
  5. Aplicar la traslación inversa



M = T(dx, dy, dz) * Rotx(–α) * Roty(–β) * Rotz(φ) * Roty(β) * Rotx(α) * T(-dx, -dy, -dz)

Geometría 3D: Reflexión

- El efecto espejo es extensible a 3D

– Reflexión c/r a un plano

Plano x = 0

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plano y = 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plano z = 0

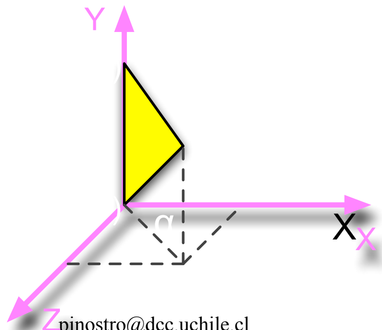
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– Reflexión c/r al origen (0, 0, 0)

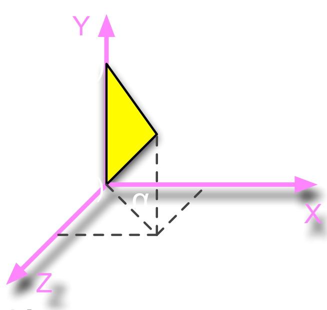
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

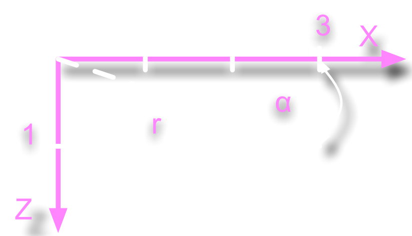
Geometría 3D: Reflexión

- Reflexión c/r a un plano arbitrario se obtiene por combinación de traslaciones, rotaciones y reflexiones básicas
- Ejemplo:
  - Calcular la reflexión del punto P(2, 2, -1) c/r al plano definido por los puntos A(0, 0, 0), B(0, 3, 0) y C(3, 1, 1).



Geometría 3D: Reflexión





- Solución:

  $r \cos(\alpha) = 3; \quad r \sin(\alpha) = 1; \quad r^2 = 3^2 + 1^2 = 10$
- despejando,

  $\cos(\alpha) = 3 / 10^{1/2}$ y $\sin(\alpha) = 1/10^{1/2}$
- entonces,

  $M = [Rot_y(- \alpha)]\ [\ Reflex(z = 0)]\ [Roty\ (\alpha)]$

  $P' = M\ P$

- Propuesto: calcular la matriz M y el punto P'

Geometría 3D: Shearing

- Shearing: Distorsión de una o más coordenadas debido a la acción de las otras coordenadas.

$$[Sh] = \begin{pmatrix} 1 & Sxy & Sxz & 0 \\ Syx & 1 & Syz & 0 \\ Szx & Szy & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Sxy: cantidad de 'shear' debido a y a lo largo de x
- Syx: cantidad de 'shear' debido a x a lo largo de y

Geometría 3D: Shearing

- Ejemplo: Distorsión de punto P(x, y, z) debido a la siguiente matriz de shearing

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & Sxy & Sxz & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & Szy & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P' = \begin{pmatrix} X + Y * Sxy + Z * Sxz \\ Y \\ Y * Szy + Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Próxima clase: Proyecciones 3D