Auxiliar 2
CC50Q

Prof: Pedro Ortega C. `<peortega@dcc.uchile.cl>`
Aux: Francisco Claude F. `<fclaude@dcc.uchile.cl>`

21 de marzo de 2006

Problema 1

Un problema puede modelarse por medio de tres variables binarias A, B, C. Dada la tabla de probabilidades conjuntas, construya la red Bayesiana asociada.

x	ABC	$AB\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$A\overline{BC}$	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{AB}C$	$\overline{ABC}$
$P(x)$	0	1/8	0	3/8	1/32	3/32	3/32	9/32

Problema 2

San Pedro, para decidir con plena seguridad si una persona determinada debe ir al Cielo o al Infierno, revisa su comportamiento en vida. Tres de las variables que considera para decidir son: I (infidelidad), M (mentiroso) y H (hereje). Se conocen las estadísticas de su criterio, resumidas en la tabla a continuación, donde C es el porcentaje de personas que se fueron al Cielo (los demás se fueron al Infierno).

I	M	H	C
no	no	no	10 %
no	no	sí	20 %
no	sí	no	15 %
no	sí	sí	30 %

I	M	H	C
sí	no	no	20 %
sí	no	sí	40 %
sí	sí	no	40 %
sí	sí	sí	90 %

1. Determine $P(C, I, M, H)$. Asuma que $P(I) = P(M) = P(H) = \frac{1}{2}$.
2. Si una persona fue hereje, determine la probabilidad de que vaya al cielo.

Pregunta 3

Considere un sistema determinístico desconocido S, que dada una entrada $x \in \mathcal{B}^n$ produce una salida $y \in \mathcal{B}$, con $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. Ud. pretende simular el comportamiento de este sistema por medio de un dispositivo (una función)

$$M : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}^{n+m} & \rightarrow & \mathcal{B} \\ (x, w) & \mapsto & y \end{array}$$

cuyos n primeros argumentos recibirán la entrada x y los m restantes argumentos son parámetros binarios $w \in \mathcal{B}^m$. Inicialmente, Ud. no posee ningún conocimiento sobre los parámetros óptimos w^* que haga que $M(x; w^*)$ se parezca lo mejor posible a $S(x)$, pero su objetivo es ajustar iterativamente los parámetros w^* a medida que observa parejas (x, y) tales que $S(x) = y$.

1. Identifique el conjunto de hipótesis $\mathcal{H}$ para este problema de modelamiento. ¿Cuántas hipótesis hay? ¿Cuáles son sus probabilidades a priori? ¿Cuál es el mínimo número de observaciones de entrada/salida del sistema real para poder identificar la hipótesis óptima? Enuncie el problema de inferencia Bayesiana.

2. Si Ud., tras interactuar con el sistema real S un total de N veces, registra el conjunto de datos $\mathcal{D} = \{(x^1, y^1), (x^2, y^2), \ldots, (x^N, y^N)\}$ tal que $S(x^i) = y^i$ para todo $i = 1, \ldots, N$, determine la mejor distribución a posteriori $P(w|\mathcal{D})$ sobre los parámetros del dispositivo.

3. Suponga que Ud. observa un nuevo dato (x', y') tras actualizar el estado de su dispositivo usando el conjunto de observaciones $\mathcal{D}$ del punto anterior. Escriba la nueva distribución a posteriori $P(w|\mathcal{D} \cup \{(x', y')\})$ como función de la distribución $P(w|\mathcal{D})$. Nótese que con esto se obtiene una regla de aprendizaje iterativa para el dispositivo.

4. Dado su dispositivo actualizado con distribución a posteriori $P(w|\mathcal{D})$ y una entrada x cualquiera, determine la mejor estimación de $S(x)$, i.e. $P(y|\mathcal{D})$.

Nota: Suponga que existe un parámetro w^* óptimo tal que $M(x; w^*) = S(x)$ para toda entrada $x \in \mathcal{B}^n$.

Problema 4

Se tiene un conjunto de datos $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^i\}_i \subset \mathbb{R}^2$ ilustrado en la figura 1 (la grilla es unitaria). Se desea ajustar un modelo que represente la densidad de probabilidad de estos puntos, dados por dos rectángulos $R_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ y $R_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$, donde $\mathbf{p}_i$ y $\mathbf{q}_i$ son la esquina superior-izquierda y la esquina inferior-derecha del rectángulo i-ésimo respectivamente. La densidad de un punto sería:

$$P(\mathbf{x}|R_1, R_2) = \begin{cases} 1/A_1 & \text{si } \mathbf{x} \in R_1 \wedge \mathbf{x} \notin R_2 \\ 1/A_2 & \text{si } \mathbf{x} \notin R_1 \wedge \mathbf{x} \in R_2 \\ 1/A_1 + 1/A_2 & \text{si } \mathbf{x} \in R_1 \wedge \mathbf{x} \in R_2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

donde A_i es el área cubierta por el rectángulo i-ésimo. Encuentre la estimación de máxima verosimilitud para los parámetros del modelo.

Problema 5

Se sabe que una variable aleatoria X puede ser modelada mediante la distribución de probabilidad:

$$P(x|w) \quad = \quad \frac{1}{Z(w)} exp(\sum_k w_k f_k(x))$$

Donde $f_k(x)$ son conocidas y los parámetros w_i son desconocidos. Se suministra un conjunto de N puntos, muestre que en el conjunto de máxima verosimilitud para w_{mv}, se cumple:

$$\sum_x P(x|w_{mv}) f_k(x) \quad = \quad \frac{1}{N} \sum_n f_k(x^{(n)})$$