Guía de problemas AS42A – Semestre Otoño 2006

1. Un observador toma un espectro de un quasar y encuentra que la línea de emisión de Hα está centrada en 7050 Å. Calcule el redshift del quasar.

2. Demostrar que si el Universo es homogéneo e isotrópico, al Universo no le queda más alternativa que seguir la ley de Hubble.

3. Calcule el tiempo de Hubble en años y segundos para el caso H_0=70 km s^{-1} Mpc^{-1} . Calcule la distancia de Hubble en Mpc para H_0=70 km s^{-1} Mpc^{-1} .

4. (a) Demuestre que en la superficie de un plano de 2D la métrica en coordenadas polares (ρ, ϕ) toma la forma:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 \tag{1}$$

(b) Demuestre que en la superficie de una esfera de radio R, la métrica en coordenadas esféricas (θ, ϕ) es:

$$ds^2 = R^2 \left[d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2 \right] \tag{2}$$

(c) Usando las coordenadas polares $\rho = R\theta$ (que corresponde a la distancia al polo) y ϕ (ángulo azimutal) demuestre que la métrica toma la forma:

$$ds^2 = d\rho^2 + R^2 sin(\rho/R) d\phi^2 \tag{3}$$

(d) Usando las coordenadas x=R sin(ρ/R) y ϕ, demuestre que la métrica toma la forma:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - (x/R)^2} + x^2 d\phi^2 \tag{4}$$

Esta es la métrica de un espacio de 2D con curvatura positiva.

(e) Además de espacios planos y espacios con curvatura positiva, en 2D también existen espacios con curvaturas negativas ($R^2 < 0$; R imaginario) cuya métrica en coordenadas polares es:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 + (x/R)^2} + x^2 d\phi^2 \tag{5}$$

Demuestre que la métrica general en 2D se escribe:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - k(x/R)^2} + x^2 d\phi^2 \tag{6}$$

en que:
k=+1 (curvatura positiva)
k= 0 (curvatura cero)
k=-1 (curvatura negativa)

5. (a) Demuestre que para un espacio 2D de curvatura positiva (k=1) y radio de curvatura R el área total es:

$$Area(total) = 4\pi R^2 \tag{7}$$

Notar que este es un espacio finito pero sin límites.

(b) Demuestre que para un espacio de curvatura cero (k=0) el área total es infinita.

(c) Demuestre que para un espacio de curvatura negativa (k=-1) el área total es infinita. Notar que este es un espacio sin límites e infinito.

6. La métrica para espacios isotrópicos en 3D se puede escribir:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - k(x/R)^2} + x^2 \left[d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2 \right] \tag{8}$$

en que:
x = R sin (ρ/R) (k=+1)
x = ρ (k= 0)
x = R sinh (ρ/R) (k=-1)

(ρ, θ, ϕ) son coordenadas esféricas y R es el radio de curvatura. Demuestre que el volumen total para k=1 es finito y tiene el valor $2\pi R^3$, y que para k=0 y k=-1, el volumen es infinito.

7. Calcule la densidad crítica actual del Universo $\varepsilon_{c,0}$ para H_0=70 km s^{-1} Mpc^{-1} . Exprese el resultado en (g cm^{-3}) y en (MeV m^{-3}).

8. Use la ecuación de Friedmann y la ecuación de fluído para derivar la ecuación de aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P) \tag{9}$$

9. Use la ecuación de fuído para demostrar que si una componente de energía del universo tiene una densidad de energía constante, entonces la ecuación de estado es P=-ε.

10. Use la ecuación de Friedmann que incluye la constante cosmológica y la ecuación de fluído para demostrar que la ecuación de aceleración toma la forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon_{tot} + 3P_{tot}) \tag{10}$$

en donde :

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon + \varepsilon_{\Lambda} \tag{11}$$

$$P_{tot} = P + P_{\Lambda} \tag{12}$$

$$\varepsilon_{\Lambda} = -P_{\Lambda} = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda \tag{13}$$

11. Demuestre que para obtener un universo estático es necesaria una constante cosmológica $\Lambda = 4\pi G\rho$ en que ρ es la densidad de materia.

12. Demuestre que en para tener un universo estático el parámetro de curvatura es +1 y que el radio de curvatura es $R_0 = \frac{c}{2\sqrt{\pi G\rho}}$.

13. Considere la ecuación de Friedmann. Asumiendo un espacio plano (k=0) con un solo fluído caracterizado por una ecuación de estado P=wE. Calcule el factor de escala a(t), la edad del Universo en función de H_0, el tiempo de emisión de un fotón en función de su redshift, y la distancia propia en función del redshift.

14. Una fuente de luz en un universo plano con un solo fluído (P=wE) se ve a redshift z en el instante actual t_0. Demuestre que la tasa de variación del redshift es:

$$\frac{dz}{dt_0} = H_0(1+z) - H_0(1+z)^{3(1+w)/2} \tag{14}$$

Para que valores de w el redshift aumenta en el tiempo? Para que valores disminuye en el tiempo?

15. Suponga un universo plano solo con materia (w=0) y H_0= 70 km s^{-1} Mpc^{-1} en el cual se observa una galaxia a z=1. Cuanto deberá esperar el observador para ver un cambio en z de una parte en 10^{-6}?

16. Asumiendo que el número de partículas no cambia durante la expansión del Universo, demuestre que la densidad de energía tiene una dependencia a^{-3} para las partículas no relativistas, mientras que para la radiación (fotones) la dependencia es a^{-4}.

17. (a) Use la definicion $H = \frac{\dot{a}}{a}$ y $q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$ para demostrar que el factor de escala se puede expresar como:

$$a(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0\ H_0^2(t - t_0)^2 \tag{15}$$

(b) Demuestre que el redshift se puede aproximar como:

$$z \approx H_0(t_0 - t_e) + (1 + \frac{q_0}{2})H_0^2(t_0 - t_e)^2 \tag{16}$$

(c) Invierta la relación anterior para demostrar que el "lookback time" se puede aproximar como:

$$t_0 - t_e \approx H_0^{-1}\left[z - (1 + \frac{q_0}{2})z^2\right] \tag{17}$$

(d) Use la definición de distancia propia para demostrar que:

$$d_p(t_0) \approx c(t_0 - t_e) + \frac{cH_0}{2}(t_0 - t_e)^2 \tag{18}$$

$$d_p(t_0) \approx \frac{cz}{H_0}\left[1 - \frac{1 + q_0}{2}z\right] \tag{19}$$

18. (a) Al sumar la luminosidad de las galaxias en la banda B en un volumen de algunos cientos de Mpc se ha determinado una densidad de luminosidad de:

$$j_B = 1.2 \times 10^8\ L_{\odot,B}\ Mpc^{-3} \tag{20}$$

Si la razon masa-luz en unidades solares para aquellas galaxias es M/L, cual es la densidad de masa ρ de la materia?

(b) La densidad crítica actual del Universo es:

$$\varepsilon_{c,0} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \tag{21}$$

Calcule la densidad de masa crítica $\rho_{c,0}$ en unidades de masas solares por Mpc^3 correspondiente a H_0=70 km s^{-1} Mpc^{-1} .

(c) Calcule el parámetro de densidad de materia $\Omega_{m,0}$ en términos de M/L.

(d) Cual es el valor necesario de M/L para que la densidad de materia aplane el Universo?

19. La galaxia Draco es una galaxia enana en el Grupo Local. Su luminosidad es L=1.8×10^5 $L_\odot$ y el radio que contiena la mitad de la luminosidad es $r_h = 120$ pc. Las estrellas gigantes rojas de la galaxia arrojan una velocidad de dispersion a lo largo de la línea de visión de σ_r= 10.5 km s^{-1} .

    (a) Use el teorema del Virial para calcular la masa de la galaxia. Que componentes de la galaxia incluye esta masa?

    (b) Cual es la razón masa-luz de la galaxia?

20. Un rayo de luz pasa rozando la superficie de la Tierra. Cual es el ángulo de deflección del rayo debido a la gravedad? Cual es el ángulo para un rayo que roza la superficie de una enana blanca? Cual es el ángulo para una estrella de neutrones?

21. Si el halo de la Galaxia es esféricamente simétrico y la curva de rotación galáctica es plana, deduzca el perfil de densidad del halo $\rho(R)$ (R es la distancia al centro de la Galaxia).

22. El Fondo de Radiacion Cósmica (CMB) tiene un espectro de cuerpo negro. Demuestre que a redshift z el CMB tambien tenía un espectro de cuerpo negro (hint: el numero de fotones por unidad de volumen se mantiene constante). Como evoluciona la temperatura del CMB con el redshift?

23. El CMB tiene un espectro de cuerpo negro cuya máxima emisión ocurre a la longitud de onda de 1 mm. Calcule la temperatura característica del CMB. En que longitud de onda estaba localizado el máximo de emisión a redshift de 1000 ? (hint: ley de Wien).

24. Derive la relación $A_p(\rho, t_0) = 4\pi S_k(\rho)^2$ a partir de la métrica de Robertson y Walker, en que $A_p(\rho, t_0)$ es el área propia de una esfera centrada en el observador de radio propio $d_p(t_0) = \rho$ en el instante actual.

25. Calcule la densidad actual de fotones del CMB en cm^{-3}, la densidad actual de energía del CMB en MeV cm^{-3}, y la energía media actual de los fotones del CMB en eV.

26. Use el parámetro de densidad de los bariones $\Omega_{bar,0}$ para calcular la densidad de energía actual de bariones en MeV cm^{-3} y la densidad actual del número de bariones en cm^{-3}. Use el resultado del problema anterior para calcular la razón actual η entre el número de bariones y el número de fotones.

27. COBE reveló una anisotropía dipolar de 3.35 mK en el CMB. Calcule el cambio en la longitud de onda máxima del espectro de CMB entre los dos polos. Suponiendo que esta anisotropía dipolar tiene su origen en el movimiento del satélite COBE con respecto al sistema de referencia en el cual el CMB es isotrópico, calcule la velocidad de COBE con respecto a dicho sistema de referencia. A qué se debe este movimiento de COBE?

28. Calcule la temperatura y la densidad de energía de la radiación, la densidad de fotones y la energía media de los fotones en eV a z=10^5. Cual era el estado de ionización del hidrógeno?

29. Usando la ecuación de Friedmann para el caso de un Universo con densidad de energía dominada por la materia, demuestre que la evolución de la constante de Hubble es:

$$H(z) = H_0 \Omega_{m,0}^{1/2} (1+z)^{3/2} \tag{22}$$

Evalúe H para la época del último scattering. Calcule la distancia al horizonte en aquella época. En el modelo benchmark ($\Omega_{m,0}$=0.3, $\Omega_{\Lambda,0}$=0.7) la distancia angular al CMB es de 13 Mpc. Calcule el tamaño angular (en grados) del horizonte en el CMB visto desde la Tierra. Explique porqué es un problema que el CMB sea tan isotrópico a escalas mayores que la distancia al horizonte.

30. Durante la etapa de nucleosíntesis primordial de ^{4}He, prácticamente todos los neutrones fueron utilizados para formar átomos de ^{4}He. Si la razón entre el número de neutrones y el número de protones es $f \equiv n_n/n_p$, demuestre que la máxima fracción de masa de Helio primordial es

$$Y_{max} = \frac{2f}{1+f} \tag{23}$$

en que $Y = m(^4He)/m_{mar}$. En la etapa de nucleosíntesis f=15%. Calcule Y_{max}. Como se compara este valor con la abundancia observada de ^{4}He primordial?

31. Suponga que el tiempo de decaimiento de los neutrones fuera 89 s en vez de 890 s. Estime Y_{max}, la máxima fracción de masa de Helio primordial, asumiendo que todos los neutrones son incorporados en átomos de ^{4}He.

32. Suponga que la diferencia en masa en reposo del neutrón y el protón fuera $Q_n = (m_n - m_p)c^2$=0.129 MeV en vez de Q_n=1.29 MeV. Estime Y_{max}, la máxima fracción de masa de Helio primordial, asumiendo que todos los neutrones son incorporados en átomos de ^{4}He.

33. Si X e Y corresponden a la fracción de masa del Universo en forma de H y He, respectivamente, calcule la fracción X' del número átomos de H y la fracción Y' del número átomos de He. Asuma X=0.76, Y=0.24.

34. El parámetro η es la razón entre el número de bariones y el número de fotones del Universo y $\Omega_{bar,0}$ es el parámetro de densidad actual de bariones. Demuestre que

$$\eta = \frac{\Omega_{bar,0}\ \varepsilon_{c,0}}{E_{bar}\ \beta T_0^3} \tag{24}$$

en que $\varepsilon_{c,0}$ es la densidad crítica actual, E_{bar} es la energía de un protón y T_0 es la temperatura actual del CMB. Muestre que:

$$\eta = 13.7 \times 10^{-9}\ \Omega_{bar,0} h_{70}^2 \tag{25}$$

en que $h_{70} = H_0/70$ km s^{-1} Mpc^{-1} . Calcule $\Omega_{bar,0}$ para η=5.5 $\times 10^{-10}$.

35. En los instantes tempranos del Universo los quarks y antiquarks eran creados por pares a partir de los fotones energéticos y aniquilados constantemente para producir fotones. Suponga que en esta "sopa de quarks" había una pequeña asimetría δ_q entre quarks y antiquarks:

$$\delta_q = \frac{n_q - n_{\overline{q}}}{n_q + n_{\overline{q}}} \tag{26}$$

Demuestre que $\delta_q = 3\eta$ en que $\eta = n_{bar}/n_\gamma$ (considere que los bariones están hechos de 3 quarks y que los fotones observados en la actualidad provienen de la aniquilación de los quarks y antiquarks). Si habían 10^9 quarks en el Universo temprano, cuantos antiquarks habían en esa época?