

Clase Auxiliar MA12A-06

Mauricio Duarte E

16 de junio de 2006

Problema: Considere la siguiente sucesión de números racionales:

$$a_1 = 1 \quad (1a)$$

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n} \quad (1b)$$

(a) Demuestre que tanto $\{a_{2n}\}$ como $\{a_{2n+1}\}$ convergen.

(b) Demuestre que ambos límites son iguales y concluya la convergencia de $\{a_n\}$.

Solución:

(a) Siguiendo la indicación, calculemos a_{n+2} en función de a_n :

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 1 + (1 + a_{n+1})^{-1} = 1 + \left(2 + \frac{1}{1 + a_n}\right)^{-1} \\ &= 1 + \left(\frac{3 + 2a_n}{1 + a_n}\right)^{-1} = 1 + \frac{1 + a_n}{3 + 2a_n} \\ &= \frac{3 + 2a_n + 1 + a_n}{3 + 2a_n} = \frac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n} \end{aligned}$$

De manera que:

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 &= \left(\frac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}\right)^2 \\ &= \frac{16 + 24a_n + 9a_n^2}{9 + 12a_n + 4a_n^2} \\ &= \frac{18 + 24a_n + 8a_n^2 - 2 + a_n^2}{9 + 12a_n + 4a_n^2} \\ &= 2 + \frac{a_n^2 - 2}{(3 + 2a_n)^2} \end{aligned}$$

Observamos que esto nos da una idea del crecimiento de la sucesión, dependiendo a qué lado de $\sqrt{2}$ se encuentra. Avancemos un poco, estudiando las sucesiones por separado:

- Definamos $H_n = a_{2n+1}$. $H_1 = 1$ y $H_2 = a_3 = \frac{7}{5}$. Probemos que H_n es creciente y acotada superiormente por $\sqrt{2}$. Primero la cota.

$H_1 = 1 < \sqrt{2}$. Si suponemos $H_n < \sqrt{2}$ entonces $H_n^2 - 2 < 0$. Por lo calculado antes:

$$H_{n+1}^2 = 2 + \frac{H_n^2 - 2}{(3 + 2H_n)^2} < 2.$$

Entonces por principio de inducción sigue que $\forall n \in \mathbb{N} \ H_n < \sqrt{2}$.

Veamos ahora que es creciente.

$$H_{n+1} - H_n = \frac{4 + 3H_n}{3 + 2H_n} - H_n = \frac{4 + 3H_n - 3H_n - 2H_n^2}{3 + 2H_n} = 2 \frac{2 - H_n^2}{3 + 2H_n} > 0.$$

Luego la sucesión es creciente y acotada superiormente por lo que converge a cierto número real h .

- El procedimiento para probar que la sucesión $G_n = a_{2n}$ converge es exactamente el anterior, pero cambiando todas las desigualdades. Tenemos así que $G_n \rightarrow g$.

(b) Veamos ahora que $h = g$. Tenemos las igualdades

$$H_{n+1} = \frac{4 + 3H_n}{3 + 2H_n} \quad G_{n+1} = \frac{4 + 3G_n}{3 + 2G_n}$$

Por lo que tomando límites y usando álgebra de límites:

$$h = \frac{4 + 3h}{3 + 2h} \quad g = \frac{4 + 3g}{3 + 2g}$$

Desarrollando ésto obtenemos que $h^2 = 2, g^2 = 2$ y como ambos son positivos $h = \sqrt{2}, g = \sqrt{2}$, por lo que son iguales. Como $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ se concluye que $a_n \rightarrow \sqrt{2}$. Ver Apunte, **Teorema 4.4.3**.