

CÁLCULO – MA12A06

Clase Auxiliar 28.04.06

1. ELEMENTOS DE FUNCIONES

PROBLEMA 1

Para las siguientes asignaciones, estudiar:

- Dominio, Imagen, Conjuntos de signo constante.
- Crecimiento, Inyectividad y Sobreyectividad.
- Paridad y Periodicidad.

$$(1) f(x) = \frac{1}{x+|x|}$$

$$(3) f(x) = (x - [x])^2$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x \left[\frac{1}{x} \right] & \text{si } x \leq -1 \\ [x] \frac{1}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1, x \neq 0 \\ |2 - x^2| & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Soluciones

(1) Hecho en clase auxiliar

(2) Para estudiar el dominio de la función, vemos donde se pueden calcular las asignaciones. Si $x \leq -1$, entonces todo está bien definido; si $-1 < x \leq 1$, $x \neq 0$ entonces no hay problemas de definición de la asignación; y como $|2 - x^2|$ siempre está definido concluimos que:

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Específicamente, si $x \leq -1$ entonces $-1 \leq \frac{1}{x}$ y como también $\frac{1}{x} < 0$ entonces $\left[\frac{1}{x} \right] = -1$. Nos queda:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq -1 \\ [x] \frac{1}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1, x \neq 0 \\ |2 - x^2| & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $-1 < x < 0$ entonces $f(x) = -\frac{1}{x}$; si $0 < x < 1$ entonces $f(x) = 0$ y $f(1) = 1$.

Es fácil apreciar de todo lo anterior que para todo $x \in \text{dom } f$ se tiene $f(x) \geq 0$. Además, si $y \geq 0$ siempre existe $x \in \text{dom } f$ tal que $f(x) = y$. En efecto, si $y \geq 1$, entonces tomando $x = -y$ se tiene que $x \leq -1$ y luego $f(x) = -x = y$. Si ahora $0 \leq y \leq 1$, entonces $y < 2$ y tiene sentido tomar $x = \sqrt{2 - y}$. Como $y \leq 1$, entonces $x = \sqrt{2 - y} \geq 1$ y entonces $f(x) = |2 - (2 - y)| = |y| = y$. Concluimos que

$$\text{im } f = [0, \infty).$$

Un análisis poquito más fino de lo anterior nos permite reformular $f(\cdot)$:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq -1 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ x^2 - 2 & \text{si } x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

De donde se tiene el comportamiento en cuanto a crecimiento de la función f :

$(-\infty, -1]$	Decreciente
$[-1, 0)$	Creciente
$(0, 1)$	Constante
$[1, \sqrt{2}]$	Decreciente
$[\sqrt{2}, \infty)$	Creciente

Es claro que f no es inyectiva pues es constante en $(0, 1)$.

La función f no es par ni periódica.

(3) Ejercicio.