CÁLCULO – MA12A06

Clase Auxiliar 28.04.06

1. Geometría Analítica – Hipérbolas

Problema 1

Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de los trazos VQ, donde V es el vértice izquierdo de la hipérbola y Q un punto cualquiera de ella.

Problema 2

Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, y $P(x_0, y_0)$ un punto de ella. Muestre que el área encerrada entre las asíntotas de $\mathcal{H}$ y la tangente a la hipérbola en P es constante.

Problema 3

Muestre que mediante un cambio de variable del estilo:

$$\begin{cases} x' &= \alpha x + \beta y \\ y' &= \gamma x + \delta y \end{cases},$$

la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puede transformarse en $x'y' = 1$.

2. Elementos de Funciones

Problema 4

Para las siguientes asignaciones, estudiar:

- Dominio, Imagen, Conjuntos de signo constante.
- Crecimiento, Inyectividad y Sobreyectividad.
- Paridad y Periodicidad.

(1) $f(x) = \frac{1}{x+|x|}$

(2) $f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & \text{si } x \leq -1 \\ [x]\frac{1}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1,\ x \neq 0 \\ \left|2 - x^2\right| & \text{si } x > 1 \end{cases}$

(3) $f(x) = (x - [x])^2$

Problema 5

Considere la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} x - 2n & \text{para } x \in [2n, 2n+1),\ n \in \mathbb{N} \\ 2n + 2 - x & \text{para } x \in [2n+1, 2n+2),\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Verifique que f es una función de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$.
2. Encuentre el mayor conjunto $A \subset \mathbb{R}$ donde la fórmula $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ define una función.
3. Muestre que $\forall n \in \mathbb{N},\ h : (2n+1, 2n+2) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto g(x)$ es estrictamente decreciente y que para $n > 1$, $h' : (2n, 2n+1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto g(x)$ es estrictamente creciente. ¿Qué pasa para $n = 0$?
4. Grafique la función $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$.
5. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F : [2n+1, 2n+2) \longrightarrow \left(0, \frac{1}{2n+1}\right]$ $x \mapsto g(x)$, es biyectiva. Encuentre la inversa.