CÁLCULO - PRIMAVERA 2006

Profesor: Leonardo Sánchez
Auxiliar: Oscar Peredo

CLASES AUXILIARES PARA EL CONTROL #4
25 de Agosto

1. Clase 1

RESUMEN:

- Definición: Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua en $\overline{x} \in (a, b)$ ssi $\forall x \in (a, b)$

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = f(\overline{x})$$

  (recordar hacer el límite por ambos lados)

- Definición: Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es deribable en $\overline{x} \in (a, b)$, si existe el límite

$$f'(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h}$$

- Operador L:
  Se define como:
  L(f(x))=$\frac{f'(x)}{f(x)}$

  Propiedades:
  L(f(x)g(x))=L(f(x))+L(g(x))
  L($\frac{f(x)}{g(x)}$)=L(f(x))-L(g(x))
  L(cf(x))=cL(f(x)) con c=constante

- Fórmula de Leibnitz:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)} g^{(n-k)}$$

Problema 1. Dado $n \in \mathbb{N}$ considere la función f(x) definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Probar que:
i)f es continua en 0 ssi $n \geq 1$
ii)f es derivable en 0 ssi $n \geq 2$
iii)f' es continua en 0 ssi $n \geq 3$

Solución 1. :
i)Pdq: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{x^n}_{\to 0 \text{ si } n\geq 1} \cdot \underbrace{\sin(\frac{1}{x})}_{\text{acotado}} = 0$$

ii)Pdq: f'(0) existe.
Si $x \neq 0$

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin(\frac{1}{x}) - x^n\cos(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}$$

Si $x = 0$(Usando la definicion)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^n \sin(\frac{1}{h})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \underbrace{h^{n-1}}_{\to 0 \text{ si } n\geq 2} \cdot \underbrace{\sin(\frac{1}{h})}_{\text{acotado}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

iii)Pdq: $\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(n \cdot \underbrace{x^{n-1}}_{\to 0 \text{ si } n\geq 2} \cdot \underbrace{\sin(\frac{1}{x})}_{\text{acotado}} - \underbrace{x^{n-2}}_{\to 0 \text{ si } n\geq 3} \cdot \underbrace{\cos(\frac{1}{x})}_{\text{acotado}}\right) = 0$$

Problema 2. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos^n(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f, su derivada y la continuidad de la derivada de f

Solución 2. :
i) Continuidad:
Si $x \neq 0$ f es continua por algebra de funciones continuas
Si $x = 0$ Pdq : $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^n(x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x)+\cos^2(x)+\ldots+\cos^{n-1}(x))}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{(1-\cos(x))}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(x)}_{\text{acotado}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ii)Derivada:
Si $x \neq 0$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-n\cos^{n-1}(x)(-\sin(x))x - 1(1-\cos^n(x))}{x^2} \\
&= \frac{n\cos^{n-1}(x)\sin(x)x - (1-\cos^n(x))}{x^2} \\
&= \frac{n\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{x} + \frac{\cos^n(x)-1}{x^2}
\end{aligned}
$$

Si $x = 0$

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h+0)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1-\cos^n(h)}{h^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{1-\cos(h)}{h^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{(1+\cos(x)+\ldots+\cos^{n-1}(x))}_{\to n} \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

iii)Derivada de f':
Si $x \neq 0$ f' es continua por algebra de funciones continuas
Si $x = 0$ Pdq: $\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = \frac{n}{2}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} &= \lim_{x \to 0} \left(n\cos^{n-1}(x)\frac{\sin(x)}{x} + \frac{\cos^n(x)-1}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \to 0} \left(n \cdot \underbrace{\cos^{n-1}(x)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to \frac{-1}{2}} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(x)}_{\to n} \right) \\
&= n - \frac{n}{2} \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

Problema 3. Calcular $f^{(4)}(1)$ para $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

Solución 3. :

$$f(x)x^2 = e^x$$

$$(f(x)x^2)^{(4)} = e^x$$

Usando la fórmula de Leibnitz

$\binom{4}{0}x^2 f^{(4)}(x) + \binom{4}{1}2xf^{(3)}(x) + \binom{4}{2}2f^{(2)}(x) = e^x$

Evaluando en x=1

$1 \cdot 1 \cdot f^{(4)}(1) + 8 \cdot 1 \cdot f^{(3)}(1) + 12 \cdot f^{(2)}(1) = e$

Ahora de la misma manera se calcula $f^{(3)}(1)$,$f^{(2)}(1)$ y $f^{(1)}(1)$
$f^{(3)}(1) = e - 6f^{(2)}(1) - 6f^{(1)}(1)$
$f^{(2)}(1) = e - 4f^{(1)}(1) - 2f(1)$
$f^{(1)}(1) = e - 2f(1)$
Reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned} f^{(4)}(1) &= 120f(1) - 67e \\ &= 53e \end{aligned}$$

Problema 4. Calcular la derivada n-ésima de $\arctan(x)$

Solución 4. :
Sabemos que la derivada de $\arctan(x)$ es:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\underbrace{\arctan'(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(1+x^2)}_{h(x)} = 1$$

Usando la fórmula de Leibnitz:

$$(g(x)h(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{(n)} g^{(n-k)}$$

$\Rightarrow \binom{n}{0}(1+x^2)g^{(n)}(x) + \binom{n}{1}2xg^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}2g^{(n-2)}(x) = 0$

$\Rightarrow g^{(n)} = \frac{-2xng^{(n-1)}-n(n-1)g^{(n-2)}}{1-x^2}$
Encontramos la derivada n-ésima de $\arctan'(x)$, entonces $g^{n-1}(x)$ corresponde a la derivada n-ésima de $\arctan(x)$.

Problema 5. Usando el operador L encontrar f'(x) siendo $f(x) = \frac{x^3 \arctan(\alpha x)}{\sqrt{x^2+1}}$

Solución 5. :

$$\begin{aligned}
L(f(x)) &= L(x^3) + L(\arctan(\alpha x)) - L(\sqrt{x^2+1}) \\
&= 3L(x) + L(\arctan(\alpha x)) - \frac{1}{2}L(x^2+1) \\
&= 3\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{1+(\alpha x)^2}\alpha}{\arctan(\alpha x)} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} \\
&= \frac{3}{x} + \frac{\alpha}{\arctan(\alpha x)(1+(\alpha x)^2)} - \frac{x}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Calculamos L(f(x)), multiplicando L(x)·f(x) y se obtiene f'(x)

Problema 6. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación $e^{2\arcsin(yx)} = \ln(1+x^2+y^2)$ en el punto p donde la curva intersecta al eje de las abcisas, con abcisa positiva

Solución 6. :
Notar que y=y(x)
Primero buscar el punto p(con coordenadas $(\overline{x}, 0)$) que intersecta con las abcisas, para esto hacemos y=0 y buscamos $\overline{x}$

$$1 = \ln(1+\overline{x}^2)$$

$$e = 1+\overline{x}^2$$

$$\overline{x} = \pm\sqrt{e-1}$$

$$\Rightarrow p = (\sqrt{e-1}, 0)$$

(Se eligió la abcisa positiva)
La recta tangente corresponde a:

$$(y-\overline{y}) = f'(\overline{x})(x-\overline{x})$$

Ahora hay que encontrar y'(x)=f'(x), y luego evaluar en $\overline{x}$

Derivando la ecuación queda:

$$e^{2\arcsin(yx)}\frac{2}{\sqrt{1-(yx)^2}}(y'x+y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}(2x+2yy')$$

Evaluando en p:

$$y'(\sqrt{e-1})=\frac{\sqrt{e-1}}{1+e-1}$$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{e}$$

La recta tangente es:

$$y-0=\frac{1}{e}(x-\sqrt{e-1})$$

2. Clase 2

RESUMEN:

- Reglas de L'Hopital:
  Sean f y g derivables en $(x_0-\delta, x_0+\delta), x\neq x_0$. Entonces:

  $Si\, \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x-0} g(x)=0$ y $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ entonces $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

  $Si\, \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x-0} g(x)=\infty$ y $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ entonces $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

  Siempre que tengamos límites de la forma L'Hopital $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar estas reglas. Si tenemos límites $0\cdot\infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ hay que llevarlos a una forma L'Hopital.

- Máximos y Mínimos:

  - x_0 se dice punto mínimo de f en $A\subseteq\mathbb{R}$ si $(\forall x\in A)$, $f(x)\geq f(x_0)$

  - x_0 se dice punto máximo de f $A\subseteq\mathbb{R}$ si $(\forall x\in A)$, $f(x)\leq f(x_0)$
  - TEOREMA: Si x_0 es punto de máximo (mínimo) y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0)=0$.

Problema 7. Calcular:
a)$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin(x)^2}$
b)$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-e^{bx^2}}{x\ln(1+x)}$
c)$\lim_{x\to\infty}(x+e^x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

d)$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

Solución 7. :
a)Primero veamos si es de la forma L'Hopital. Evaluando en 0, nos queda el límite de la forma $\frac{0}{0}$, entonces podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin(x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-(cos(x)+x(-\sin(x)))}{2\sin(x)\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(x)+x\sin(x)}{2\sin(x)\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\cos(x)}$$

Evaluando nuevamente en 0, vemos que queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\cos(x)}=0$$

$$\Rightarrow lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin(x)^2}=0$$

b)Es de la forma $\frac{0}{0}$ entonces aplicando la regla queda:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-e^{bx^2}}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2axe^{ax^2}-2bxe^{bx^2}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$$

Evaluando en 0, queda $\frac{0}{0}$, entonces nuevamente derivamos:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2a(e^{ax^2}+x2axe^{ax^2})-2b(e^{bx^2}+x2bxe^{bx^2})}{\frac{1}{1+x}+\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}}$$

Evaluando en 0, no es de la forma L'Hopital y da:

$$=(a-b)$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax^2}-e^{bx^2}}{x\ln(1+x)}=(a-b)$$

c)Vemos que evaluando en ∞ este límite es de la forma ∞^0. En estos casos lo típico es tomar el logaritmo a la función y después aplicar la exponencial, ya que $e^{\ln(f(x))}=f(x)$(esto lo podemos hacer ya que, el logaritmo y la exponencial son funciones continuas y podemos meterlas en el límite($\lim_{x\to 0}\exp(f(x))=\exp(\lim_{x\to 0}f(x))$). De esta manera tenemos:

$f(x)=(x+e^x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \ln(f(x))=\frac{1}{x}\ln(x+e^x+e^{2x})$. Esto si es de la la forma L'Hopital($\frac{\infty}{\infty}$), entonces aplicando la regla:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+e^x+e^{2x})}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+e^x+e^{2x}}(1+e^x+2e^{2x})}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^x+2e^{2x}}{x+e^x+e^{2x}}$$

Es nuevamente $\frac{\infty}{\infty}$, derivando nuevamente:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+4e^{2x}}{1+e^x+2e^{2x}}$$

Otra vez es $\frac{\infty}{\infty}$, derivamos:

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+8e^{2x}}{e^x+4e^{2x}}$

No seguimos derivando ya que podemos ver que siempre va a ser de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, por ser exponenciales. Pensemos un poco...podemos factorizar arriba y abajo por e^{2x} y asi nos queda:

$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}(e^{-x}+8)}{e^{2x}(e^{-x}+4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}+8}{e^{-x}+4} = \frac{8}{4} = 2$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(x+e^x+e^{2x})^{\frac{1}{x}} = e^2$.(Recordar que $e^{\ln(f(x))} = f(x)$)

d)Como $\lim_{x\to 0} \frac{a^x+b^x}{2} = 1$ y $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$, se tiene una expresión de la forma 1^∞, sin embargo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\ln\left[\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\right]\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left[\frac{a^x+b^x}{2}\right]\right) \end{aligned}$$

y como $\lim_{x\to 0} \ln\left[\frac{a^x+b^x}{2}\right] = 0$ y $\lim_{x\to 0} x = 0$, se tiene una expresión de la forma $\frac{0}{0}$, aplicando la regla de L'Hopital a $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{a^x+b^x}{2}\right] &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{a^x+b^x}\,\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{a^x+b^x} \\ &= \frac{\ln a+\ln b}{2} \\ &= \ln\sqrt{ab} \end{aligned}$$

Como exp es una función continua, $\lim_{x\to 0}\exp(f(x)) = \exp(\lim_{x\to 0} f(x))$, luego

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp(\ln\sqrt{ab}) = \sqrt{ab}$$

Problema 8. Con un trozo de material rectangular, se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones a(largo) y b(ancho).

Solución 8. :
Nos están pidiendo maximizar el volvumen, entonces lo primero es determinar la función V(x) y luego calcular su primera derivada para encontrar los puntos críticos y luego evaluar los puntos en la función y ver con cual, V(x) es mayor, entonces:

El volumen de la caja corresponde a:

$$V(x) = (a-2x)(b-2x)x = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$$

Su primera derivada es:

$$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$$

Resolviendo la ecuación cuadrática $V'(x) = 0$ nos dan dos soluciones $x_1 = \frac{(a+b)+\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$ y $x_2 = \frac{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$ con $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Al evaluar en V(x) se tiene que $V(x_1) \leq V(x_2)$, por lo tanto x_2 es un máximo y x_1 un mínimo. Finalmente las dimensiones óptimas son largo a-$2x_2$, ancho b-$2x_2$ y alto x_2.
Otra manera de determinar si es un máximo o mínimo es analizar la segunda derivada, en este caso tenemos que:
$V''(x_1) = 6\sqrt{a^2+b^2-ab} \geq 0$, entonces corresponde a un mínimo
$V''(x_2) = -6\sqrt{a^2+b^2-ab} \leq 0$, entonces corresponde a un máximo.

Problema 9. Se desea construir un estanque cilíndrico de capacidad 1000 metros cúbicos. Los costos de construcción son los siguientes: r la tapa, q el manto y p la tapa.
Calcular las dimensiones del estanque tales que los costos de construcción sean los mínimos y se satisfagan los requerimientos de capacidad pedidos.

Solución 9. :
Lo primero que debemos hacer es modelar el problema, definiendo las variables. Sea y la altura del estanque y x el radio basal del estanque. Tenemos dos variables y como sólo sabemos minimizar en una variable, debemos usar alguna condición del problema que ligue a las variables x e y.En este caso la ligadura de las variables viene dada por la restricción de capacidad del estanque. Sea V_0 la capacidad del estanque. Entonces tenemos: $V_0 = \pi x^2 y \Rightarrow y = \frac{V_0}{\pi x^2}$
Ahora debemos escribir la función que queremos minimizar, en este caso los costos de construcción del estanque. Sea $C(x)$ esta función. Entonces:
$C(x) =$ Costo tapa + Costo manto + Costo fondo
$C(x) = \pi x^2 r + 2\pi xyq + \pi x^2 p$
$C(x) = \pi x^2(r+p) + \frac{2V_0 q}{x}$

Lo siguiente es encontrar los puntos críticos. Como $x \in (0, \infty)$ los puntos críticos estaán dados cuando $C'(x) = 0$.
$C'(x) = 2\pi x(r+p) - \frac{2V_0 q}{x^2}$
$C'(x) = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt[3]{\frac{V_0 q}{\pi(r+p)}}$
Analizando la segunda derivada comprobamos que $V''(x*) = 2\pi(r+p) + \frac{4V_0 q}{x*^3} \geq 0$ entonces $x*$ efectivamente corresponde a un mínimo. Luego las dimensiones óptimas son:

RADIO= $\sqrt[3]{\frac{V_0 q}{\pi(r+p)}}$

ALTURA= $\dfrac{V_0}{\pi x^*}$

3. Clase 3

RESUMEN:

- Teorema del valor medio(TVM)
  Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en [a,b] y derivables en (a,b), con $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

  En particular si $g(x) = x$ entonces:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- Teorema(Monotonía)
  Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en [a,b] y derivable en (a,b).

  i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en [a,b].

  ii)Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en [a,b].

- Teorema(Covexidad/Concavidad)
  Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en [a,b] y 2 veces derivable en (a,b).

  i) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es covexa en [a,b].

  ii)Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es cóncava en [a,b].

- Corolario:Determinación de Máximos y mínimos con la primera derivada
  Sea f una función derivable en un intervalo [a,b] tal que f' es continua en [a,b].

  i) Si $f'(x) > 0$ en (a, x_0) y $f' < 0$ en $(x_0, b) \Rightarrow$ f tiene un máximo relativo en x_0.

  ii)Si $f'(x) < 0$ en (a, x_0) y $f' > 0$ en $(x_0, b) \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en x_0.

- <u>Corolario:Determinación de máximos y mínimos con la segunda derivada</u>
  Sea f función con f" continua en [a,b] y x_0 un punto crítico de f.

  i) Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en x_0

  ii)Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ f tiene un máximo relativo en x_0

  iii)i) Si $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ no hay información.

Problema 10. Usando el TVM, demuestre las siguientes desigualdades:
(a)$e^x \geq 1 + x \ \forall x \in \mathbb{R}$
(b)$-x \leq \sin(x) \leq x \ \forall x \geq 0$

Solución 10. :
(a)Sea $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $f'(x) > 1$ si $x > 0$ y $f'(x) < 1$ si $x < 0$. Apliquemos el TVM con:

$a = 0, b = x$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \qquad x_0 \in (0, x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(x_0) > 1 \qquad x_0 \in (0, x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = e^{x_0} > 1$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > x \Leftrightarrow e^x > 1 + x$$

Tenemos la desigualdad para los $x > 0$, y tiene que ser $\forall x \in \mathbb{R}$. veamos que pasa con los $x < 0$, procedamos del mismo modo:

$a = x, b = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{f(0) - f(x)}{-x} = f'(x_0) < 1 \qquad x_0 \in (x, 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - e^x}{-x} = e^{x_0} < 1$$

$$\Rightarrow 1 - e^x < -x \Leftrightarrow e^x > 1 + x$$

Y para x=0 se cumple directamente la igualdad(1=1).

$\Rightarrow 1 + x \leq e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$

(b)Sea $f(x) = \sin(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$. Aplicando el TVM con a=0,b=x. Nos queda:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(x_0) \qquad x_0 \in (0, x)$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \cos(x_0)$$

Pero $-1 \leq \cos(x_0) \leq 1$. Luego $-x \leq \sin(x) \leq x \ \forall x \geq 0$

Problema 11. Sea f continua en $[0, \infty)$ y derivable en $(0, \infty)$ y f' es creciente en $(0, \infty)$ con $f(0) = 0$. Utilize el teorema del valor medio para probar que $f'(x) \geq \dfrac{f(x)}{x}, \forall x \in (0, \infty)$. Concluya que f es creciente en $(0, \infty)$.

Solución 11. :
Para $x \in (0, \infty)$, se cumplen la hipotesis del TVN en $[0, x]$, luego, $\exists c \in (0, x)$ tal que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$, pero como $f(0) = 0$, se tiene que $\dfrac{f(x)}{x} = f'(c)$. Como $c < x$ se tiene que $f'(c) \leq f'(x)$, pues f' es creciente en $(0, \infty)$, por lo tanto $f'(x) \geq f'(c) = \dfrac{f(x)}{x}$ para todo $x > 0$.
Ahora demostremos que f es creciente. Sabemos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{x}\right)' &= \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \\ &= \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x} \end{aligned}$$

Como $f'(x) - \frac{f(x)}{x} \geq 0$(demostrado anteriormente) y $x > 0$ se tiene que $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' \geq 0$, con lo cual $\dfrac{f(x)}{x}$ es creciente. Si $x \leq y$ entonces $\dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{f(y)}{y}$, es decir, $f(x) \leq f(y) \underbrace{\dfrac{x}{y}}_{\leq 1} \leq f(y)$, con lo cual f es creciente en $(0, \infty)$.

Problema 12. Analizar el comportamiento de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Solución 12. :

- Dominio:
  $f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 2] \Leftrightarrow D(f) = [-2, 2]$

- Ceros:
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

- Signo de f:
  $f(x) \geq 0 \; \forall x \in D(f)$

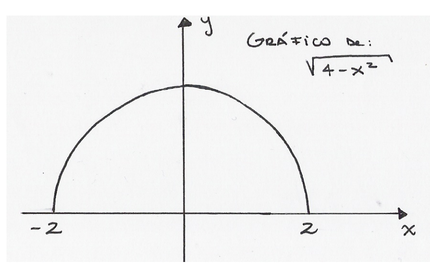
- Puntos críticos:
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- Continuidad:
  f es continua en todo su dominio por algebra y composición de funciones continuas.

- Crecimiento:
  $f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$. Entonces en $x = 0$ la función alcanza su máximo valor $f(0) = 2$.

- Concavidad/Convexidad:
  $f''(x) = \frac{-4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$, vemos que siempre es negativa, por lo que la curva es cóncava.

- Gŕafico:



Problema 13. Analizar la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$.

Solución 13. :
Escribamos $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x-2)}$

- Dominio:
  $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

- Ceros:
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- Signos de f:
  El numerador cambia de signo en $x = 0$ y el denominador en $x = -1$ y $x = 2$, y f es continua en su dominio. Calculemos los valores de f en cada subintervalo.
  $(-\infty, -1)$ f es negativa ya que $f(-2) = -2 < 0$.
  $(-1, 0)$ f es positiva ya que $f(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{10} > 0$.
  $(0, 2)$ f es negativa ya que $f(1) = \frac{-1}{2} < 0$.
  $(2, \infty)$ f es positiva ya que $f(3) = \frac{27}{4} > 0$.

- Puntos críticos:
  $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-x-2)-(2x-1)x^3}{\Big((x+1)(x-2)\Big)^2} \\ &= \frac{x^4-2x^3-6x^2}{\Big((x+1)(x-2)\Big)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2-2x-6)}{\Big((x+1)(x-2)\Big)^2} \end{aligned}$$

  $\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-2x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $x^2 - 2x - 6 = 0$
  Resolviendo la ecuación nos queda:
  $x_1 = 0, x_2 = 1 + \sqrt{7}, x_3 = 1 - \sqrt{7}$ son puntos críticos.

- Continuidad:
  f es continua para todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq -1$ y $x \neq 2$, por composición de funciones continuas y por algebra de funciones continuas.

- Crecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-2x-6)}{\Big((x+1)(x-2)\Big)^2}$$

Los cambios dependen de (x^2-2x-6), y son en x_2 y x_3. Haciendo una tabla queda:

x	$(-\infty, 1-\sqrt{7})$	$(1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7})$	$(1+\sqrt{7}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

- Concavidad/Convexidad:

$$f''(x) = \frac{6x(x^2+2x+4)}{(x+1)^3(x-2)^3}$$

Puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x^2+2x+4 = 0$(cuyas soluciones pertenecen a los complejos)
(x^2+2x+4) siempre es $\geq 0 \Rightarrow$ el signo va a depender del denominador

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Entonces f tiene un máximo en $x = 1-\sqrt{7}$ y un mínimo en $x = 1+\sqrt{7}$.

- Asíntotas y límites complementarios:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} f'(x) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x^2-2x-6)}{\Big((x+1)(x-2)\Big)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(se usó L'Hopital para resolver el límite).

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\infty} \Big(f(x) - mx\Big) \\ &= \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{x^3}{x^2-x-2} - x\Big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(También se usó L'Hopital).

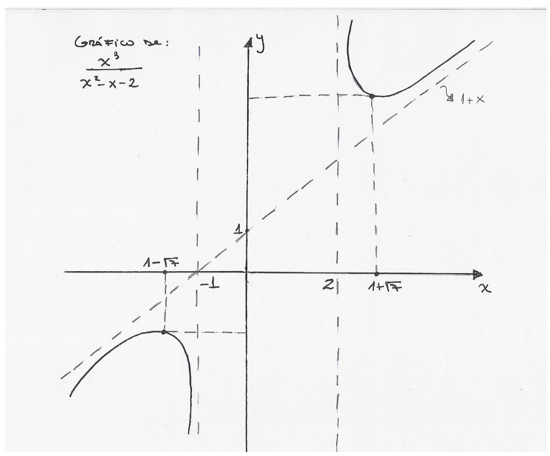
$\Rightarrow y = mx + n = x + 1$ es una asíntota oblicua.

Otros límites:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{2} = -\infty$

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{2} = \infty$

- Gráfico:



4. Clase 4

RESUMEN:

- Fórmula de Taylor:
  Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Supongamos que f es $(n + 1)$ veces derivable en $x_0 \in (a, b)$. El polinomio de Taylor de orden n de f en x_0 es:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k, \qquad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

El error que se comete al aproximar$f(x)$ por $T_n(x)$, se llama Resto y es:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x$$

$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \Rightarrow \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

- Derivadas n-ésimas:
  Si $f'(x)$ es la primera derivada, podemos siguir derivando en órdenes superiores una cantidad tal que la derivada de ese orden exista para la función f(x):
  $f^{(0)} = f(x)$
  $f^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$

  Algunas derivadas n-ésimas importantes son:

  $f(x) = x^n \rightarrow f^{(n)}(x) = n!$
  $f(x) = e^{ax} \rightarrow f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$
  $f(x) = sen(x) \rightarrow f^{(n)}(x) = sen(\frac{n\pi}{2} + x)$
  $f(x) = cos(x) \rightarrow f^{(n)}(x) = cos(\frac{n\pi}{2} + x)$
  $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

  Propiedades:
  1)$(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$
  2) $(f \cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$ (Regla de Leibnitz)

Problema 14. Analizar el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{\sin^3(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\cos^3(\frac{x}{2})}$

Solución 14. :
Para este problema les recomiendo que grafiquen la función $\sin(x)$ y $\cos(x)$ juntas, ya que varios resultados son más fáciles verlos en el gráfico.

- Dominio:
  La función es de período 4π, por lo que basta analizarla en $[0, 4\pi]$. Por esta razón trabajaremos en el dominio restringido: $D(f) = [0, 4\pi] - \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\}$

- Ceros:

$$f(x) = \frac{\sin^3(\frac{x}{2}) + \cos^3(\frac{x}{2})}{\sin^3(\frac{x}{2})\cos^3(\frac{x}{2})} = 0,$$

  por tanto, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^3(\frac{x}{2}) + \cos^3(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{x}{2}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0$, pues el otro factor no tiene raíces reales. Esto implica: $\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}$ y $\frac{x}{2} = \frac{7\pi}{4}$, es decir, $x = \frac{3\pi}{2}$ y $x = \frac{7\pi}{2}$

- Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{\sin^5(\frac{x}{2}) - \cos^5(\frac{x}{2})}{\sin^4(\frac{x}{2})\cos^4(\frac{x}{2})} = 0,$$

Se anula para $\sin(\frac{x}{2}) = \cos(\frac{x}{2})$, es decir, para $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{5\pi}{2}$

- Crecimiento:
  La derivada es positiva para los x tales que $\sin(\frac{x}{2}) > \cos(\frac{x}{2})$, lo que implica, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$.

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	$(2\pi, \frac{5\pi}{2})$	$(\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$	$(3\pi, \frac{7\pi}{2})$	$(\frac{7\pi}{2}, 4\pi)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

- Puntos de inflexión:

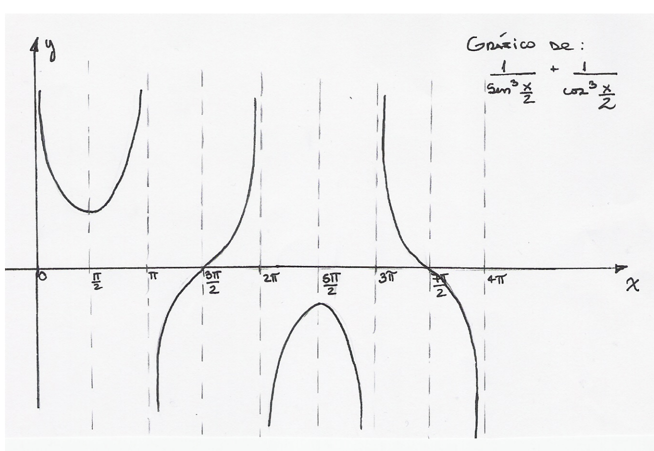
$$f''(x) = \left(\frac{15 + 9\cos(x)}{8}\right)\left[\operatorname{cosec}^5(\frac{x}{2}) + \sec^5(\frac{x}{2})\right],$$

  el primer factor no se anula, pues si lo hiciera tendríamos $\cos(x) = \frac{-15}{9}$, lo que no puede ser. Por lo tanto debe anularse el segundo factor, lo que sucede cuando $\sin(\frac{x}{2}) = -\cos(\frac{x}{2})$, así$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ y entonces, tenemos como candidatos a puntos de inflexión $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$.

- Concavidad/Convexidad:
  Para determinar el signo de f" basta calcular la f" en algunos puntos estratégicos, como ya hemos hecho en otros problemas.
  $f''(\frac{5\pi}{4}) = -323,778 < 0$
  $f''(\frac{7\pi}{4}) = 323,778 > 0$
  $f''(\frac{13\pi}{4}) = 323,778 > 0$
  $f''(\frac{15\pi}{4}) = -323,778 < 0$.

  Por lo tanto la función tiene: en $(\frac{\pi}{2}, 4\sqrt{2})$ un mínimo y en $(\frac{5\pi}{2}, -4\sqrt{2})$ un máximo. y los puntos de inflexión son: $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{7\pi}{2}, 0)$.

- Gráfico:



Problema 15. Determine el intervalo de números reales para que la fórmula $\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25}$ de un resultado con 3 decimales exactos.

Solución 15. :
$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{5}}$
$f'(x) = \frac{1}{5}(1+x)^{\frac{-4}{5}}$
$f''(x) = \frac{-4}{25}(1+x)^{\frac{-9}{5}}$
$f'''(x) = \frac{36}{125}(1+x)^{\frac{-14}{5}}$

$\Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + R_3(x) = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + R_3(x)$

$|R_3(x)| = \left|\frac{f'''(\xi_x)(x-x_0)^3}{3!}\right|$

En nuestro caso $x_0 = 0$ y la tercera derivada ya la calculamos, entonces queda:

$|R_3(x)| = \left|\frac{36}{125}(1+\xi_x)^{\frac{-14}{5}}\frac{x^3}{3!}\right| \qquad \xi_x$ está entre 0 y x:
$\Rightarrow |R_3(x)| = \left|\frac{6}{125}(1+\xi_x)^{\frac{-14}{5}}x^3\right| \underbrace{\leq}_{\xi_x=0} \left|\frac{6x^3}{125}\right| < 10^{-3}$
$\Rightarrow |x^3| < \frac{125}{6\cdot 10^3} = \frac{5^3}{6\cdot 10^3} = \frac{1}{6\cdot 2^3}$
$\Rightarrow |x| < \frac{1}{2\cdot\sqrt[3]{6}}$

Problema 16. Calculando la derivada n-ésima de x^{2n} de dos formas distitas, demuestre que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Solución 16. .
Primera forma: Derivemos hasta encontrar una recurrencia:
$f(x) = x^{2n}$
$f'(x) = 2nx^{2n-1}$
$f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-1}$
$\vdots$
$f^{(k)}(x) = 2n(2n-1)(2n-2)\ldots(2n-(k-1))x^{2n-k} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!}x^{2n-k}$
Luego para $k = n$ tenemos:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!}x^n$$

Segunda forma: $f(x) = x^n \cdot x^n$. Apliquemos Regla de Leibnitz
$f^{(n)}(x) = (x^n \cdot x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^n)^{(2-k)}(x^n)^{(k)}.$

Pero tenemos que $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$. Con esto la expresión anterior queda
$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot \frac{n!x^k}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{(n-k)} = n!x^n \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$. Obtenemos

$$f^{(n)}(x) = n!x^n \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2$$

Ahora igualando la primera y la segunda forma de calcular la derivada n-ésima de x^{2n} obtenemos el resultado pedido.
$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$

Problema 17. .
a) Determinar el polinomio de Taylor en torno a 0 y encontrar el resto para la función $f(x) = ln(1+x)$.
b) Encontrar el error que se comete al calcular $ln(1,1)$ mediante P_3.

Solución 17. :

(a) Lo primero que debemos hacer en encontrar las derivadas $k - esimas$ de f, para encontrar los coeficientes a_k.

$$\begin{array}{rcccrcrcr} f'(x) & = & \frac{1}{x+1} & \rightarrow & f'(0) & = & 1 & = & 0! \\ f''(x) & = & \frac{-1}{(x+1)^2} & \rightarrow & f''(0) & = & -1 & = & -(1!) \\ f'''(x) & = & \frac{2}{(x+1)^3} & \rightarrow & f''(0) & = & 2 & = & 2! \\ f^{(iv)}(x) & = & \frac{-2\cdot 3}{(x+1)^4} & \rightarrow & f^{iv}(0) & = & -2\cdot 3 & = & -(3!) \end{array}$$

$\vdots$

$$f^{(k)}(x) \;=\; \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k} \;\rightarrow\; f^{(k)}(0) \;=\; (-1)^{(k-1)}(k-1)!$$

Con esto, f queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}(k-1)!x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)}x^k}{k} + \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) $|R_3(x)| = |\frac{(-1)^3 x^{3+1}}{(3+1)(1+\xi)^{3+1}}| = \frac{|x|^4}{4(1+\xi)^4}$. Ahora para $x = 0,1$ tenemos:

$$|R_3(0,1)| \leq \frac{(0,1)^4}{4}$$

, pues $\xi \in (0, 0{,}1)$.