Resumen Función Exponencial MA12A-06

Mauricio Duarte E

7 de julio de 2006

1. Definiciones

Función Exponencial Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe el límite siguiente existe:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n . \tag{1}$$

A partir de esto, podemos definir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ talque $f(x)$ es el valor del límite (1). Explícitamente:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n . \tag{2}$$

Usualmente se denota $f(x)$ por $\exp(x)$.

1.1. Propiedades de la función exponencial

(a) Dom(exp)=$\mathbb{R}$, Im(exp)=$\mathbb{R}_+$=$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

(b) $\exp(\cdot)$ es estrictamente creciente,$x < y \Rightarrow \exp x < \exp y$, y por lo tanto inyectiva.

(c) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ es invertible. A su inversa le llamamos función logarítmica: $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

(d) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

(e) Si llamamos $e = \exp 1$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface que $\exp(x) = e^x$.

(f) Desigualdades:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x \qquad\qquad \forall x < 1, \quad \frac{1}{1-x} \geq e^x$$

(g) Límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \forall n \geq 0 \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$$

Función Logaritmo Habíamos visto que $\exp(\cdot)$ es invertible y su inversa es la función logaritmo. Sin embargo tambien podemos definirla de otra manera. Para $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\ln(x) = \lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) \tag{3}$$

1.2. Propiedades de la función logaritmo

(a) Dom(ln)=$\mathbb{R}_+$, Im(ln)=$\mathbb{R}$.

(b) ln($\cdot$) es estrictamente creciente,$x < y \Rightarrow \ln x < \ln y$, y por lo tanto inyectiva.

(c) $\ln : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ es invertible. Su inversa es (ya sabemos) la función exponencial.

(d) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ se tiene que $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ y $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

(e) Si llamamos $\ln(e) = 1$. Además para todo $x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}$ se tiene quetonces para todo $x \in \mathbb{R}$ se satisface que $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$.

(f) Desigualdades:

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad y - 1 \geq \ln(y) \qquad\qquad \forall y < e, \quad 1 - \frac{1}{y} \leq \ln(y)$$

(g) Límites:

$$\lim_{y \to 1} \frac{\ln y}{y - 1} = 1, \qquad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty.$$

(h) Otros Límites:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{x \to 0} x^{\varepsilon} \ln(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} x^{-\varepsilon} \ln(x) = 0$$