CÁLCULO - PRIMAVERA 2006

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliar: Valentina Peredo

CLASE AUXILIAR #12
3 de Noviembre

RESUMEN:

- Teorema:
  Si la serie $\sum a_k$ converge entonces $(a_n) \Rightarrow 0$ Este teorema es lo primero que se debe chequear cuando nos piden estudiar la convergencia de una serie, ya que si $(a_n) \not\Rightarrow 0$ entonces la serie diverge(la contrarecíproca del teorema).

- Criterios de Convergencia(solo para suceciones con términos positivos)

  1. Criterio de comparación
     Sean $(a_n) y (b_n)$ de modo que existen n_0 y $\alpha > 0$ tale que para todo $n \geq n_0, a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k \quad converge \Rightarrow \sum a_k \quad converge$

  2. Criterio de comparación por cuociente
     Sean a_n y b_n dos suceciones. Supongamos que $c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe. Se tiene segun el valor de c que:
     - $c = 0$.Si $\sum b_k$ converge entonces $\sum a_k$ converge.
     - $c > 0$.Si $\sum b_x$ converge ssi $\sum a_k$ converge (o divergen)

  3. Criterio del cuociente
     Sea a_n una sucesión. Supongamos que existe $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.Dependiendo del valor de r se concluye:
     - $r < 1$ entonces la serie $\sum a_k$ converge.
     - $r > 1$ o $r = \infty$ entonces la serie $\sum a_k$ diverge.
     - r=1 no hay información.

  4. Criterio de la raiz n-ésima
     Sea a_n una sucesion y supongamos que $c = \lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}}$ existe. Si:

- $r < 1$ entonces la serie $\sum a_k$ converge.
- $r > 1$ o $r = \infty$ entonces la serie $\sum a_k$ diverge.
- r=1 no hay información.

5. Criterio de la integral impropia: sea $f : [1, \infty) \Rightarrow \mathbb{R}^+$ función decreciente. Se tiene que $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge ssi $\int_1^\infty f(x)dx$ converge.

- Series conocidas
  - $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge.
  - $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge
  - $\sum_{k\geq 0} q^k = \frac{1}{1-q}$ si $0 \leq |q| \leq 1$
  - $\sum_{n\geq 1} = \frac{q}{1-q}$

Problema 1. Muestre la convergencia o no convergencia de las siguientes series.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{3+2^{-n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}+3^n}{4^n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2ne^{-n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

Solución 1. .

1. Utilizemos el teorema $\sum a_n < +\infty \Rightarrow a_n \to 0$. Veamos si la sucesion asociada converge a 0. Es mas, veamos que la sucesion ni siquiera converge. Tomemos la subsucesion a_{2n} y a_{2n+1}:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{3+2^{-2n}} &= \frac{-2}{3} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+2^{-(2n+1)}} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto no converge y la serie no es convergente.

2. Acotemos superiormente la serie. $2^{n-1} < 3^{n-1}$, por lo tanto
$\sum_{n=1}^{N} \frac{2^{n-1}+3^n}{4^n} < \sum_{n=1}^{N} \frac{3^{n-1}+3^n}{4^n} < \sum_{n=1}^{N} \frac{3^n+3^n}{4^n} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{3^n}{4^n} = 2\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^n$
$= 2\left(\frac{\frac{3}{4}-(\frac{3}{4})^{N+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) \to 6$, por lo tanto, la serie es convergente.

3. Utilizemos el criterio del cuociente.

$$\begin{aligned} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{2(n+1)}{e^{n+1}} \frac{e^n}{2n} \\ &= \lim \frac{1}{e} \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la serie es convergente (el limite es menor que 1).

4. Criterio del cuociente:

$$\begin{aligned} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} \\ &= \lim 2 \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \\ &= \frac{2}{e} \end{aligned}$$

   Como $\frac{2}{e} < 1$, la serie es convergente.

5. Realizando el procedimiento anterior, se obtiene que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e} > 1$, por lo tanto la serie diverge.

6. Criterio de Mayoracion o comparacion. Como $\frac{1}{n^2 \ln n} \leq \frac{1}{n^2}$ y como $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la serie converge.

Problema 2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ es convergente?

Solución 2. Criterio del cuociente:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+1)^2}}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(n+1)^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2+2n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^{2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{2n+4-3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \underbrace{\left(\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{n+2}\right)^{2}}_{\to e^{-2}} \underbrace{\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-3}}_{\to 1} \\
&= \frac{1}{e^2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \\
&= \frac{1}{e^2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n^2} \\
&= \frac{1}{e^2} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n^2+2n}}_{\to e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{-2n}}_{\to 1} \\
&= e^{-1}
\end{aligned}
$$

*Para el segundo termino del límite, una manera de resolverlo es con L'hopital, ya que es un límite de la forma 1^{∞}. Revisar esto en la auxiliar que vimos L'hopital.
Por lo tanto, la serie converge ($e^{-1} < 1$).