

## CLASE AUXILIAR #13 17 de Noviembre

### RESUMEN:

- Covergencia Puntual.

Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones definidas en un intervalo  $I$ . decimos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  es el límite puntual de la sucesión  $f_n$  si  $\forall x \in I$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

- Covergencia Uniforme.

Decimos que una sucesión  $f_n$  definida en  $I$ , converge uniformemente a  $f(x)$  si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

$$\text{con } \|f_n - f\| = \underbrace{\sup}_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

- Series de Potencias.

La idea de una serie de potencias es representar una función  $f(x)$  entorno a un punto  $x_0$ . Nos enfocaremos en series de potencias entorno a  $x_0 = 0$ . Por lo tanto la serie de potencia se representa de la siguiente forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

donde  $a_k = \frac{f(0)^k}{k!}$ , entonces lo primero que tenemos que hacer es encontrar  $f(x)^k$  y después evaluar en  $x = 0$ .

Para determinar el intervalo de convergencia de la serie definimos el radio de convergencia que corresponde a:

$$\rho = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}}$$

Recordar que se debe evaluar en los extremos y ver directamente si esas serie son convergentes o divergentes.

### Problema 1. .

1. Sea  $\alpha > 0$ . Estudiar la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-\ln(n)}$
2. Si las series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  son ambas convergentes y  $a_n, b_n \geq 0$ , demostrar que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$  converge
3. Probar que si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  converge.

### Solución 1. .

1. Primero probemos una identidad útil para  $a, b > 0$

$$\ln(a) \ln(b) = \ln(b) \ln(a) \Rightarrow \ln(b^{\ln(a)}) = \ln(a^{\ln(b)}) \Rightarrow b^{\ln(a)} = a^{\ln(b)}$$

Luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(\alpha)}} \quad \text{converge si } \ln(\alpha) > 1 \Leftrightarrow \alpha > e$$

2. Recordemos que  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , pues  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ .

Asm  $\forall n \in \mathbb{N}$  tenemos  $2\sqrt{a_n b_n} \leq a_n + b_n$ . Con esto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{1}{2} \left( \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{converge}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{converge}} \right) \quad \text{converge}$$

3. Es un caso particular del ejercicio anterior con las series convergentes de termino general

$$a_n^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{n^2}$$

**Problema 2.** Demostrar que la serie de potencias de  $f(x) = \log(1-x)$  converge solamente para  $x \in [-1, 1)$

**Solución 2.** La serie de potencias en torno a 0 de  $\log(1-x)$  es  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log(1-x))^{(k)}(0)}{k!} x^k$ .  
 Calculemos sus derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{1-x} \\ f''(x) &= \frac{-1}{(1-x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{-2}{(1-x)^3} \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= \frac{-(n-1)!}{(1-x)^n} \end{aligned}$$

Con esto, la serie resulta:

$$0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-(k-1)!}{k!} x^k$$

Calculemos el radio de convergencia:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1}} \\ &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Veamos los extremos:

Caso  $x = 1$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k}$$

Es la serie armonica, luego no converge.

Caso  $x = -1$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k}$$

Por el criterio de Leibniz, converge. Como  $f(x)$  no esta definida en 1, es convergente en  $[-1, 1)$ .

### Problema 3 (examen 2004)

i) Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias

(1.0 pto.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n, k \text{ fijo}, k \in \mathbb{N} - \{0\}$$

ii) Determine el radio e intervalo de convergencia, analizando los extremos, para la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} x^n$$

(1.5 pto.)

### Solución

i) Para estudiar el radio de convergencia de  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$  puede estudiar

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[(n+1)!]^k x^{n+1} (nk)!}{[k(n+1)!]^k (n!)^k x^n} \right| \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k (nk)!}{(nk+k)!} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k \cdot 1 \cdot 2 \dots nk}{1 \cdot 2 \dots nk(nk+1)(nk+2) \dots (nk+k)} \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(nk+1)(nk+2) \dots (nk+k)} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{k^k \left(n + \frac{1}{k}\right) \left(n + \frac{2}{k}\right) \dots (n+1)} \end{aligned}$$

(0.5 pto.)

Pero  $\frac{(n+1)^k}{\left(n + \frac{1}{k}\right) \dots (n+1)} \rightarrow 1$  (ambos polinomios son de grado  $k$ )

De modo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \frac{|x|}{k^k}$

Entonces el radio de convergencia es  $r = k^k$

(0.5 pto.)

ii) Se puede usar el criterio del cociente o de la raíz

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} x^{n+1}}{(-1)^n 3^n x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3|x| \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = 3|x| \end{aligned}$$

De modo que radio de convergencia es  $r = \frac{1}{3}$

(0.5 pto.)

Intervalo provisorio  $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ . Para los extremos se tiene, en  $x = \frac{1}{3}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$  que es una serie alternante de Leibniz con  $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$  decreciendo.

$\therefore$  La serie converge en  $x = 1/3$

(0.5 pto.)

Para  $x = -1/3$   $\sum \frac{(-3)^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  que diverge, por comparación, por ejemplo, con  $\sum \frac{1}{n+1}$  (armónica)

Así, el intervalo de convergencia es  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

(0.5 pto.)

**Problema 4 (Control 6 2001)**

Dado  $n \geq 1$ , se define la función  $f_n : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$f_n(x) = \frac{n+1}{n} \int_x^\infty \frac{dt}{t^{2+1/n}}.$$

- (a) (1.5 pto.) Pruebe que  $f_n(x) = \frac{1}{x^{1+1/n}}$ .  
 (b) (1.5 pto.) Encuentre el límite puntual  $f(x)$  de la sucesión  $(f_n(x))$ .  
 (c) (3.0 pts.) Determine si  $(f_n)$  converge uniformemente.

**Solución**

(a) (1.5 pts.) Notemos que

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{dt}{t^{2+1/n}} &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_x^s \frac{dt}{t^{2+1/n}} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left( \frac{t^{-(2+1/n)+1}}{-(2+1/n)+1} \Big|_{t=x}^{t=s} \right) \quad (0.5 \text{ pto.}) \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left( \frac{s^{-(1+1/n)}}{-(1+1/n)} - \frac{x^{-(1+1/n)}}{-(1+1/n)} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^{-(1+1/n)}}{(1+1/n)} - \frac{s^{-(1+1/n)}}{(1+1/n)} \right), \end{aligned}$$

pero sabemos que para  $\alpha > 0$  se tiene

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s^{-\alpha} = 0,$$

luego

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s^{-(1+1/n)}}{1+1/n} = 0, \quad (0.5 \text{ pto.})$$

y por lo tanto

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^{2+1/n}} = \frac{x^{-(1+1/n)}}{(1+1/n)} = \left( \frac{n}{n+1} \right) \frac{1}{x^{1+1/n}}.$$

Luego

$$f_n(x) = \frac{(n+1)}{n} \int_x^\infty \frac{dt}{t^{2+1/n}} = \left( \frac{n+1}{n} \right) \left( \frac{n}{n+1} \right) \frac{1}{x^{1+1/n}} = \frac{1}{x^{1+1/n}}. \quad (0.5 \text{ pto.})$$

(b) **(1.5 pts.)** Notemos que

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1+1/n}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^{1/n}},$$

y si  $x \in [1, \infty)$ , se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1, \quad (0.5 \text{ pto.})$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1+1/n}} = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1. \quad (0.5 \text{ pto.})$$

Luego  $(f_n)_n$  converge puntualmente a  $f(x) = 1/x$ ,  $x \geq 1$ . **(0.5 pto.)**

(c) Debemos estudiar si

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [1, +\infty)} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad (0.5 \text{ pto.})$$

donde  $f(x) = 1/x$  ( $x \geq 1$ ) es el límite puntual obtenido en la parte (b). Sea

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+1/n}}.$$

Tenemos que  $g_n(x) \geq 0$  si  $x \geq 1$ . Buscaremos el máximo de  $g_n(x)$ , para lo cual comenzamos por calcular su derivada

$$g'_n(x) = -\frac{1}{x^2} + (1 + 1/n) \frac{1}{x^{2+1/n}}. \quad (0.3 \text{ pto.})$$

Buscaremos  $x_n$  tal que  $g'_n(x_n) = 0$ , luego resolvemos

$$g'_n(x) = \frac{1}{x^2} \left[ -1 + \frac{(1 + 1/n)}{x^{1/n}} \right] = 0,$$

pero

$$\begin{aligned} -1 + \frac{(1 + 1/n)}{x^{1/n}} = 0 &\Leftrightarrow x^{1/n} = 1 + 1/n \\ &\Leftrightarrow x = (1 + 1/n)^n \end{aligned}$$

como además

$$\left. \begin{aligned} g'_n(x) &\geq 0, & x &\in [1, (1 + 1/n)^n] \\ g'_n(x) &\leq 0, & x &\in [(1 + 1/n)^n, +\infty) \end{aligned} \right\} \quad (0.4 \text{ pto.})$$

se tiene que el máximo se alcanza en  $x_n = (1 + 1/n)^n$  **(0.3 pto.)**, luego

$$\begin{aligned} g_n(x_n) &= \frac{1}{x_n} \left( 1 - \frac{1}{x_n^{1/n}} \right) \\ &= \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \left( 1 - \frac{1}{(1 + 1/n)} \right) \\ &= \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \left[ 1 - \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right] \\ &= \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \left[ 1 - \frac{n}{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \left[ \frac{1}{n+1} \right]. \quad (0.5 \text{ pto.}) \end{aligned}$$