

CLASE AUXILIAR #11 27 de Octubre

RESUMEN:

- Integral impropia de primera especie (Intervalos no acotados)

Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a, \infty)$ si se cumple:

1. $\forall x \in (a, \infty)$, f es integrable en $[a, x]$ y además:
2. Existe el límite definido por:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$$

Si una función es integrable en el intervalo $[a, \infty)$ entonces el valor de el límite se llama integral impropia de primera especie de f y se denota:

$$\int_a^\infty f = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f$$

- Integral impropia de segunda especie (Funciones no acotadas)

Sea $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ ssi:

1. $\forall x \in (a, b)$, f es integrable en $[a, x]$ y además:
2. Existe el límite definido por:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$$

Si una función es integrable en el intervalo $[a, b)$ entonces el valor de el límite se llama integral impropia de segunda especie de f y se denota:

$$\int_a^{b^-} f = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f$$

- Criterios de convergencia

1. Criterio de Comparación:

Si f y g son funciones continuas en $[a, \infty)$ tales que existe $b \geq a \forall x \geq b$
 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ entonces:

$$\text{Si } \int_a^\infty g \quad \text{converge} \Rightarrow \int_a^\infty f \quad \text{converge}$$

Usar también la contrarecípoca:

$$\int_a^\infty f \quad \text{diverge} \Rightarrow \int_a^\infty g \quad \text{diverge}$$

2. Criterio del cociente de funciones:

Sean f y g dos funciones continuas en $[a, \infty]$ y no negativas en $[b, \infty]$ donde $b \geq a$ tales que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Entonces $\int_a^\infty f$ y $\int_a^\infty g$ son ambas convergentes o divergentes.

Estos mismos criterios se pueden usar para las integrales de segunda especie.

Usando el criterio del cociente se pueden tener las siguientes reglas:

1. $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = L > 0$, con $\alpha > 1$.
2. $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ converge si $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha f(-x) = L > 0$, con $\alpha > 1$.
3. $\int_a^{b^-} f(x)dx$ converge si $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^\alpha f(x) = L > 0$, con $\alpha < 1$.
4. $\int_{a^+}^b f(x)dx$ converge si $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^\alpha f(x) = L > 0$, con $\alpha < 1$.

Problema 1. Determinar la convergencia de las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx & \text{b) } \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx & \text{c) } \int_{-\infty}^\infty x dx \\ \text{d) } \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \text{e) } \int_1^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x^2} dx & \end{array}$$

Solución 1. .

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{a) } \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan(b) - \arctan(0)] = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) = \text{converge}$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c x e^{-x^2} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b x e^{-x^2} dx \\ = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left. \frac{-e^{-x^2}}{2} \right|_a^c + \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-x^2}}{2} \right|_c^b = 0 \quad \text{converge}$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^\infty x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c x dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^c + \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^2}{2} \right|_c^b \\ = - \underbrace{\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a^2}{2}}_{\text{No existe}} + \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^2}{2}}_{\text{No existe}} \quad \text{Luego No Converge.}$$

$$\text{d) } \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arcsin(x) \Big|_a^c + \lim_{b \rightarrow \infty} \arcsin(x) \Big|_c^b \\ = \underbrace{\lim_{a \rightarrow -\infty} -\arcsin(a)}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \arcsin(b)}_{\frac{\pi}{2}} = \pi \quad \text{Luego converge a } \pi$$

e) Es difícil calcular la primitiva así que usamos un criterio, por ejemplo comparación. En general, si tenemos una función continua acotada por una constante, esto es:

$$(\exists M \in \mathbb{R}) \quad \text{tq} \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En este caso si debemos calcular la integral:

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx, \quad \text{con } \alpha > 1$$

Usamos el criterio como sigue:

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha} dx \leq \int_1^\infty \frac{|f(x)|}{x^\alpha} dx \leq \int_1^\infty \frac{M}{x^\alpha} dx = M \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Como esta última integral converge, la primera también lo hace. Luego este ejercicio es un caso particular para $f(x) = \sin(x)$

Problema 2. Considere $I = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x} dx$, $J = \int_0^\infty \frac{x e^{-x}}{1+x} dx$.

a) Pruebe que I converge y que cumple $\frac{1}{2} \leq I \leq 1$

a) Pruebe que J converge y exprese J en función de I

Solución 2.

a) Notar que:

$$1+x \geq 1 \quad \forall x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+x} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-x}}{1+x} \leq e^{-x} \quad \forall x \geq 0$$

Con esto tenemos que:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx \leq \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 \Rightarrow I \text{ converge}$$

Ademas sabemos que

$$e^x \geq 1+x \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{1+x} \Rightarrow e^{-2x} \leq \frac{e^{-x}}{1+x}$$

Con esto, obtenemos el resultado pedido pues:

$$\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-2x} dx}_{\frac{1}{2}} \leq \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx \leq \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x} dx}_1$$

b)Notar que:

$$\frac{xe^{-x}}{1+x} \leq \frac{(1+x)e^{-x}}{1+x} = e^{-x} \quad \forall x \geq 0 \Rightarrow J \leq \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

Ahora para expresar J en funcisn de I usemos un truco similar:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{(1+x-1)e^{-x}}{1+x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx - \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx = 1 - I \Rightarrow J = 1 - I$$

Problema 3. Estudiar la convergencia de las integrales impropias:

- $\int_0^1 \frac{\arctan(x)dx}{x^2}$
- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}, \text{ con } a \geq 0$

Solución 3. .

- Usando el criterio del cuociente tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\arctan(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+x^2}}{1} = 1 \neq 0 \quad (\text{Se usó L'Hopital}).$$

Como $\int_0^{\infty} \frac{1}{x}$ diverge entonces $\int_0^1 \frac{\arctan(x)dx}{x^2}$.

$$\bullet \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$$

Veamos los dos casos $a \geq 0$ y $a = 0$.

$a \geq 0$

Se puede comparar con:

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+a)} \leq \frac{1}{\sqrt{xa}}$$

Y como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}$ converge entonces $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ también converge.

Veamos el otro término. También por comparación:

$$\frac{1}{\sqrt{x}(a+x)} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Y como $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge entonces $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ converge

$a = 0$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Como $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ diverge y $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge, entonces $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ diverge.