

## CLASE AUXILIAR #9 6 de Octubre

### RESUMEN:

- Volúmenes de sólidos de revolución:

1. Rotación de  $R$  entorno a eje  $OX$ .

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2) dx$$

2. Rotación de  $R$  entorno a eje  $OY$ .

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

- Largo de una curva:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- Área de regiones definidas por funciones negativas:

$$A(R) = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b (-f(x)) dx$$

**Problema 1.** Para  $n \in \mathbb{N}$  se define:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(x) dx$$

a) Calcule  $I_0, I_1$  y demuestre que:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

b) Sea  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt$  para  $x > 0$

b.1) Demuestre que  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$

b.2) Demuestre que  $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$

**Solución 1.**

a)  $I_0 = \frac{\pi}{2} \quad I_1 = 1$

Tomemos  $I_{n+2}$  e integremos por partes, para bajar el grado  $n$

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n+2}(x) dx = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n+1}(x) \text{sen}(x) dx. \quad \text{Tomemos } u = \text{sen}^{n+1}(x) \quad dv = \text{sen}(x) dx$$

$$= \underbrace{-\cos(x) \text{sen}^{n+1}(x)}_0 \Big|_0^{\pi/2} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(x) \cos^2(x) dx = (n+1) \int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(x) (1 - \text{sen}^2(x)) dx$$

$$= (n+1) \left( \underbrace{\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(x) dx}_{I_n} - \underbrace{\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n+2}(x) dx}_{I_{n+2}} \right)$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \Leftrightarrow I_{n+2}(1+n+1) = (n+1)I_n \Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

b.1) Notemos que  $f(1) = \int_1^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = 0$

Ahora veamos el crecimiento de  $f$ . Calculemos la derivada usando T.F.C:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt \right) = \frac{\ln(x)}{1+x}$$

Ahora como  $\ln(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1, \quad 1+x \geq 0 \quad \forall x \geq -1$ , entonces  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$

Como  $f(1) = 0$  y  $f$  es creciente, entonces  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$ .

b.1) Calculemos  $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt + \int_1^{1/x} \frac{\ln(t)}{1+t} dt$

La idea es poder juntar las 2 integrales en una sola. Para esto usemos el siguiente cambio de variables en la segunda integral:

$$t = \frac{1}{u} \quad dt = -\frac{1}{u^2} du$$

límites:  $t=1 \Rightarrow u = 1$

$t=1/x \Rightarrow u = x$

Con estos cambios obtenemos:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt + \int_1^x \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u}} \frac{-du}{u^2} = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} dt + \int_1^x \frac{\ln(u)}{u(1+u)} du$$

Como la variable de integración  $u$  es una variable muda podemos juntar las dos integrales en una sola, obteniendo:

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t} \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{\ln(x)^2}{2}$$

**Problema 2.** Calcule el largo de la curva definida por la función periódica (discontinua) de periodo 2,  $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ \cosh x & x \geq 1 \end{cases}$ , en 10 periodos.

**Solución 2.** La fórmula del largo de una curva en el plano es  $L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

Separemos la curva en sus 2 partes:

Parte 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f'(x) &= 1 \\ L_0^2(f) &= \int_0^1 \sqrt{1+1} dx \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Parte 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cosh x \\ f'(x) &= \sinh x \\ L_0^2(f) &= \int_1^2 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{\cosh^2 x} dx \\ &= \int_1^2 \cosh x dx \\ &= \sinh 2 - \sinh 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el largo de la curva en 10 periodos es  $10(\sqrt{2} + 2 - 1)$ .

**Problema 3.** Sea  $\alpha \in (0, 1)$ . Sea  $\mathcal{R}$  la región encerrada por la curva  $x^\alpha$ , el eje OY y la recta tangente a  $x^\alpha$  en el punto  $x = 1$ :

a) Pruebe que el Area de la regisn  $\mathcal{R}$  es:  $A = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$

b) Pruebe que el Volumen de revolucisn en torno al eje OY de la regisn es  $V = \pi \frac{\alpha(1-\alpha)}{3(2+\alpha)}$

c) Si  $\alpha = \frac{2}{3}$ , calcular el permmetro de la regisn.

**Solución 3.** . a) La recta tangente esta dada por la ecuacisn:  $y = \alpha(x-1) + 1$ . Luego el area encerrada sera il area bajo la recta **menos** el area bajo la curva. Asm:

$$A(\alpha) = \int_0^1 \alpha(x-1) + 1 - \int_0^1 x^\alpha = -\frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$$

b) Se debe calcular el volumen de revolucisn de la recta  $x^\alpha$  y restar el volumen de revolucisn de la curva, pues esta esta sobre la recta al ser  $\alpha < 1$  en torno el eje OY. Es decir, se debe calcular la integral:

$$V(\alpha) = 2\pi \int_0^1 x(\alpha(x-1) + 1) - 2\pi \int_0^1 xx^\alpha = \pi \frac{\alpha(1-\alpha)}{3(2+\alpha)}$$

c) Al bosquejar la regisn lo znico difcil de calcular es el largo de la curva  $x^{2/3}$ . La derivada es  $\frac{2x^{-1/3}}{3}$ . luego el largo viene dado por:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{2x^{-1/3}}{3}\right)^2} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x^{2/3} + \frac{4}{9}}}{x^{1/3}} dx = \left(x^{2/3} + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$$

**Problema 4.** Resolver las siguientes integrales:

$$1. I = \int \frac{3x-2}{x^2+x+1} dx.$$

Reescribiendo el denominador:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

Y haciendo el cambio de variable:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}z^2$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}$$

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dz$$

Con esto,  $(x^2 + x + 1) = \frac{3}{4}(z^2 + 1)$ :

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}z - \frac{3}{2} - 2\right)}{\frac{3}{4}(z^2 + 1)} \frac{\sqrt{3}}{2} dz \\
 &= \int \frac{9z - 7\sqrt{3}}{3(z^2 + 1)} dz \\
 &= 3 \int \frac{z}{z^2 + 1} dz - \frac{7\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{z^2 + 1} dz \\
 &= \frac{3}{2} \ln(z^2 + 1) - \frac{7\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C
 \end{aligned}$$

2.  $I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx.$

Para estos problemas se recomienda hacer el cambio de variable  $y = \sqrt[6]{x}$ , donde q es el minimo comun denominador de los exponente, en este caso es 6, entonces hacemos el cambio de variable  $y = \sqrt[6]{x}$ , se tiene  $x = y^6$  y por lo tanto  $dx = 6y^5 dy$ .

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{6y^7 dy}{2y^3(1 + y^2)} \\
 &= 3 \int \frac{y^4 dy}{1 + y^2} \\
 &= 3 \int \frac{(y^4 - 1 + 1) dy}{1 + y^2} \\
 &= 3 \int \frac{y^4 - 1}{y^2 + 1} dy + 3 \int \frac{1}{1 + y^2} dy \\
 &= 3 \int (y^2 - 1) dy + 3 \int \frac{1}{1 + y^2} dy \\
 &= 3\left(\frac{y^3}{3} - y\right) + 3 \arctan(y) + C \\
 &= \sqrt{x} - 3\sqrt[6]{x} + 3 \arctan \sqrt[6]{x} + C
 \end{aligned}$$