

CLASE AUXILIAR #8 29 de Septiembre

RESUMEN:

$$\bullet \frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Problema 1. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $[0, 1]$ que satisface $0 < f'(t) \leq 1$ y $f(0) = 0$. Probar que:

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \geq \int_0^1 f^3(t) dt$$

Solución 1. Consideremos la función:

$$F(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt$$

$$F'(x) = 2 \left(\int_0^x f(t) dt \right) f(x) - f^3(x) = \left[2 \left(\int_0^x f(t) dt \right) - f^2(x) \right] f(x)$$

Consideremos ahora la función

$$G(x) = 2 \left(\int_0^x f(t) dt \right) - f^2(x)$$

$$G'(x) = 2f(x) - 2f'(x)f(x) = (2 - 2f'(x))f(x) \geq 0 \Rightarrow G \text{ creciente.}$$

$$\Rightarrow F \text{ creciente. Además } F(0) = 0 \Rightarrow F(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 \geq \int_0^x f^3(t) dt$$

En particular si tomamos $x = 1$ se tiene el resultado pedido.

Problema 2. Resuelva las siguiente integral indefinida:

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Usando el resultado anterior, calcule $\int \left[\frac{1}{(1+x^2)^{100}} - \frac{197}{198(1+x^2)^{99}} \right]$

Solución 2.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} \\
&= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n} dx \\
&= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx \\
&= \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx \\
&= I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx
\end{aligned}$$

Usando integracion por partes para $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx$ se tiene que:

$$u(x) = x, v'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n} \Rightarrow u'(x) = 1, v(x) = \frac{-1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}$$

De esta forma, $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n} dx = \frac{-x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$.

La formula resultante es:

$$\begin{aligned}
I_n &= I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \\
&= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\int \left[\frac{1}{(1+x^2)^{100}} - \frac{197}{198(1+x^2)^{99}} \right] dx = \frac{x}{198(1+x^2)^{99}}.$

Problema 3. Calcule las siguientes integrales:

1. $\int \ln x dx:$

Integracion por Partes: $u = \ln x, v' = 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{x}, v = x$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int \ln x dx &= x \ln x - \int dx + C \\
&= x \ln x - x + C
\end{aligned}$$

2. $\int (a+bx)^n dx:$

Por cambio de variable: $y = a+bx \Rightarrow x = \frac{y-a}{b} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{b}$, por lo tanto:

$$\int (a+bx)^n dx = \int (a+b(\frac{y-a}{b}))^n \frac{dx}{dy} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int y^n \frac{dy}{b} \\
&= \frac{y^{n+1}}{b(n+1)} \\
&= \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}
\end{aligned}$$

3. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$:

Por cambio de variable: $y = \ln x \Rightarrow x = e^y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx &= \int \frac{\cos(y)}{e^y} \frac{dx}{dy} dy \\
&= \int \frac{\cos(y)}{e^y} e^y dy \\
&= \int \cos(y) dy \\
&= y + C \\
&= (\ln x) + C
\end{aligned}$$

4. $\int \frac{dx}{x(\ln(x) + (\ln(x))^2)}$:

Usemos el C.V. $u = \ln(x)$ $du = \frac{1}{x} dx$. Con esto la integral queda como:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x(\ln(x) + (\ln(x))^2)} &= \int \frac{du}{u+u^2} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u+1} \\
&= \ln(|u|) - \ln(|u+1|) + K = \ln\left(\frac{|u|}{|u+1|}\right) + K \text{ Ahora volviendo a la variable original} \\
&= \ln\left(\frac{|\ln(x)|}{|\ln(x)+1|}\right) + K
\end{aligned}$$

5. $I = \int_a^b \operatorname{cosec} x dx, a \leq b$:

Se sabe que $x = 2\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$, luego:

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b x dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{2\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)} dx \\
&= \int_a^b \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{2\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} dx \\
&= \int_a^b \frac{\frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} dx
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\tan(\frac{x}{2}) = y \rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})} dx = dy$, luego:

$$\begin{aligned} I &= \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{dy}{y} \\ &= \ln |y(b)| - \ln |y(a)| \\ &= \ln \left| \tan\left(\frac{b}{2}\right) \right| - \ln \left| \tan\left(\frac{a}{2}\right) \right| \\ &= \ln \left(\left| \frac{\tan(\frac{b}{2})}{\tan(\frac{a}{2})} \right| \right) \end{aligned}$$