

CLASE AUXILIAR #7 15 de Septiembre

RESUMEN:

- Sumas de Riemann:

Para una partición equispaciada del intervalo $[a, b]$ se tiene:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Donde:

$h = i \frac{(b-a)}{n}$, es el paso de la partición.

$$x_i = a + i \frac{(b-a)}{n}$$

Problema 1. .

a) Demostrar que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}[f^2(b) - f^2(a)]$$

Donde:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}\right) \cdot f'\left(a + i \frac{(b-a)}{n}\right)$$

b) Use a) para calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{i=1}^n \frac{\arctg(i/n)}{i^2 + n^2}$$

Solución 1. a) Calculemos el límite S_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b-a}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{(b-a)}{n}\right) \cdot f'\left(a + i \frac{(b-a)}{n}\right).$$

Reconocemos una partición equispaciada del intervalo $[a, b]$, es decir:

- Paso de la partición : $h = \frac{b-a}{n}$

- $x_i = a + i \frac{(b-a)}{n}$

Ademas consideremos la función $g(x) = f(x)f'(x)$. Asi tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \left(\frac{b-a}{n} \right) = \int_a^b g(x) dx \\ &= \int_a^b f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) \Big|_a^b = \frac{1}{2} [f^2(b) - f^2(a)] \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n n \frac{\arctg(i/n)}{i^2 + n^2}$$

Reconocemos una partición equiespaciada y una suma de Riemann:

$$f(x) = \arctg(x) \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad b = 1 \quad a = 0$$

Usando la parte a) tenemos que esta suma corresponde a:

$$\int_0^1 \frac{\arctg(x)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \arctg^2(x) \Big|_0^1 = \frac{\arctg^2(1) - \arctg^2(0)}{2} = \frac{\pi^2}{32}$$

Problema 2. .

a) Calcular

$$\int_0^\pi \ln(1+x^2) dx$$

b) Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i^2 \pi^2}{n^2} \right)} \right]$$

Solución 2. .

Primero encontremos la primitiva $\int \ln(1+x^2) dx$. Lo que conviene en este caso es integrar por partes.

$$\begin{aligned} \text{Sea } f(x) &= \ln(1+x^2) \quad g'(x) = 1 \quad \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad g(x) = x \\ \Rightarrow \int \ln(1+x^2) dx &= x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot x \, dx \end{aligned}$$

Veamos ahora la integral que nos queda:

$$\int \frac{2x^2}{1+x^2} dx = 2 \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = 2 \int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = 2(x - \arctg(x))$$

Entonces la primitiva queda:

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - 2(x - \arctg(x)) \text{ Volviendo a los límites}$$

$$\int_0^\pi \ln(1+x^2) dx = [x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctg(x)] \Big|_0^\pi = \pi \ln(1+\pi^2) - 2\pi + 2 \arctg(\pi)$$

b)Notemos que:

$$\ln \left[\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i^2 \pi^2}{n^2} \right)} \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{i\pi}{n} \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{i\pi}{n} \right)^2 \right) \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\pi}$$

Reconocemos una suma de Riemann. $f(x) = \ln(1+x^2)$, $b = \pi$, $a = 0$, $x_i = \frac{i\pi}{n}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{i\pi}{n} \right)^2 \right) \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(1+x^2) dx$$

Como por la parte a) conocemos el valor de esta integral, obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{i^2 \pi^2}{n^2} \right)} \right] = \ln(1+\pi^2) - 2 - 2 \frac{\arctan(\pi)}{\pi}$$

Problema 3. Resuelva la siguiente integral:

$$I_n = \int \sin^n x dx, n \in \mathbb{N}$$

Y calcule $\int \left[\sin^{24} x - \frac{23}{24} \sin^{22} x \right] dx$

Solución 3. .

Se puede considerar la integral de la forma:

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x dx$$

y luego se aplica la integracion por partes:

$$u(x) = \sin^{n-1} x, v'(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x, v(x) = -\cos x$$

Luego:

$$\begin{aligned} I_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int^n x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) I_n \\ I_n(1 + (n-1)) &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx \\ I_n &= \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \end{aligned}$$

Con esto, se tiene que $\int \left[\sin^{24} x - \frac{23}{24} \sin^{22} x \right] dx = \frac{-\sin^{23} x \cos x}{24} + C$.

Problema 4. Resuelva las siguientes integrales:

1. $\int \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} dx$

Como el denominador tiene mayor grado que el numerador, tratemos de ver si el denominador lo podemos escribir como el producto de dos factores. Vemos que $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$, entonces:

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A(x - 1) + B(x - 3)}{(x - 3)(x - 1)}$$

Igualando los numeradores tenemos:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= A(x - 1) + B(x - 3) \\ &= Ax - A + Bx - 3B \\ &= (A + B)x - (A + 3B) \end{aligned}$$

Por igualdad de polinomios obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ A + 3B &= 5 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene $A=2$ y $B=1$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 5}{x^2 - 4x + 3} &= \int \frac{2}{x - 3} + \int \frac{1}{x - 1} \\ &= 2 \ln(x - 3) + \ln(x - 1) + C \end{aligned}$$

2. $\int \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} dx$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} &= \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \\ &= \frac{A(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Igualando numeradores nos queda:

$$x^2 + 2x - 3 = A(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x - 1)^2,$$

lo que implica la igualdad

$$x^2 + 2x - 3 = (B + C)x^3 + (A - B - 2C + D)x^2 + (B + C - 2D)x + (A - B + D)$$

Esto nos conduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} B + C &= 0 \\ A - B - 2C + D &= 1 \\ B + C - 2D &= 2 \\ A - B + D &= 3 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $A=3$, $B=-1$, $C=1$ y $D=-1$. Así nos queda:

$$\int \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} dx = \int \frac{3}{(x - 1)^2} dx - \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{x - 1}{x^2 + 1} dx$$

Estas integrales si sabemos calcularlas (queda propuesto para ustedes, ya que la dificultad del problema era la descomposición de la integral)