CÁLCULO - PRIMAVERA 2006

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliar: Valentina Peredo

CLASE AUXILIAR #6
8 de Septiembre

RESUMEN:

- Condición de Riemann: Una función f definida y acotada en un intervalo [a,b] es Riemann integrable en [a,b] ssi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in P_{[a,b]}) \qquad S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

con

$$s(f,P) = \sum_{i=0}^{n} m_i \Delta x_i \qquad m_i = inf(f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i])$$
$$S(f,P) = \sum_{i=0}^{n} M_i \Delta x_i \qquad M_i = sup(f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i])$$

y $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Problema 1. Demuestre que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$$

Hint: Considere la partición p=$\{0, 1/2, 1\}$

Solución 1. Usemos la partición que nos dan:
$a = x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $b = x_2 = 1$. El paso de la partición es 1/2.
Notamos que la función e^{-x^2} es decreciente $\forall x > 0$. Luego:
$s(f,p) = \sum\limits_{i=1}^{2} f(\frac{i}{n})\frac{b-a}{n} = \sum\limits_{i=1}^{2} e^{-(\frac{i}{2})^2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2} e^{-(\frac{i}{2})^2}$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} + \frac{1}{e}\right)$. Análogamente tenemos:
$S(f,p) = \sum\limits_{i=1}^{2} f(\frac{i-1}{n})\frac{b-a}{n} = \sum\limits_{i=1}^{2} e^{-(\frac{i-1}{2})^2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{2} e^{-(\frac{i-1}{2})^2}$
$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$.
Sabemos que:
$s(f,p) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S(f,p)$. Asíse tiene el resultado pedido.

Problema 2. Calcule las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int e^x \cos x dx$:

   Integración por Partes: $u = e^x, v' = \cos x \Rightarrow u' = e^x, v = x$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x dx \\ &= e^x x - \underbrace{\int e^x x dx}_{J} + C \end{aligned}$$

   Para J, hacemos $u = e^x, v' = x \Rightarrow u' = e^x, v = -\cos x$, nos queda:

$$\begin{aligned} I &= e^x x - \left(-e^x \cos x - \int -e^x \cos x dx\right) + C \\ I &= e^x x + e^x \cos x - I + C \\ 2I &= e^x x + e^x \cos x + C \\ I &= \frac{e^x x + e^x \cos x}{2} + \tilde{C} \end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx, a > 0$:

   Por cambio de variable: $y = \frac{x}{\sqrt{a}} \Rightarrow x = y\sqrt{a} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{a}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{\sqrt{a}})^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sqrt{a} dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= y + C \\ &= (\frac{x}{\sqrt{a}}) + C \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \arcsin(x) dx$:

   Por Partes: $u = \arcsin(x), v' = 1 \Rightarrow u' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, v = x$, nos queda:

$$\int \arcsin(x(dx = x \arcsin(x) - \underbrace{\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx}_{J} + C$$

Para J hacemos el cambio de variable: $y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2ydy = -2xdx \Rightarrow ydy = -xdx$:

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \int \frac{-ydy}{y} \\ &= -y + C \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral resulta:

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x)dx &= x\arcsin(x) - (-\sqrt{1-x^2}) + \tilde{C} \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + \tilde{C} \end{aligned}$$

4. $\displaystyle\int \frac{cos(x)}{sen(x)ln(sen(x))}dx$

Tomando $v = senx \quad dv = cos(x)dx$ tenemos:

$\int \frac{cos(x)}{sen(x)ln(sen(x))}dx = \int \frac{dv}{vln(v)}$ Ahora $u = ln(v) \quad du = \frac{dv}{v}$
$= \int \frac{du}{u} = ln(u) + K = ln(ln(v)) + K = ln(ln(sen(x))) + K.$

5. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$

Hagamos el cambio $x = sen(u) \quad dx = cos(u)du$. Entonces queda:

$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-sen^2(u)}cos(u)du = \int cos^2(u)du.$
Recordando la identidad trigonometrica
$cos^2(u) = \frac{cos(2u)+1}{2}$ tenemos

$\int cos^2(u)du = \int \frac{cos(2u)+1}{2}du = \frac{1}{2}\left(\int cos(2u)du + \int 1du\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{sen(2u)}{2} + u\right) + K.$ Volviendo a las variables originales
$= \frac{1}{2}\left(\frac{sen(2arcsen(x))}{2} + arcsen(x)\right) + K.$

6. $\displaystyle\int \frac{cos(x)}{1+cos(x)}dx \qquad$. Considere el C.V. $u = tg(\frac{x}{2})$

$u = tg(\frac{x}{2}) \Leftrightarrow x = 2arctg(u) \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$
Escribamos ahora seno y coseno en función de $tg(\frac{x}{2})$

$sen(x) = \frac{2sen(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2})}{cos^2(\frac{x}{2})+sen^2(\frac{x}{2})} = \frac{2tg(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})} = \frac{2u}{1+u^2}$

$cos(x) = \frac{cos^2(\frac{x}{2})-sen^2(\frac{x}{2})}{cos^2(\frac{x}{2})+sen^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-tg^2(\frac{x}{2})}{1+tg^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Ahora usemos esto en la primitiva que nos piden.
$\int \frac{cos(x)}{1+cos(x)}dx = \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}dx \cdot \frac{2du}{1+u^2}$ Simplificando... $= \int \frac{1-u^2}{1+u^2}du = -\int \frac{u^2-1}{1+u^2}du = -\int \frac{1+u^2-2}{1+u^2}du$
$= -\left(\int du - 2int\frac{1}{1+u^2}du\right) = -u + arctg(u) + K$
Ahora volviendo a la variable original tenemos:
$\int \frac{cos(x)}{1+cos(x)}dx = x - tg(\frac{x}{2}) + K$

7. $I = \displaystyle\int cos(ln(x))dx \qquad J = \int sen(ln(x))dx$. Plantee sist. de ecuaciones para I y J
Integremos por partes I y J para obtener un sistema de ecuaciones:

$I = \int cos(ln(x))dx = xcos(ln(x)) - \int x(-sen(lnx))\frac{1}{x}dx = xcos(ln(x)) + J$

$J = \int sen(ln(x))dx = xsen(ln(x)) - \int xcos(ln(x))\frac{1}{x}dx = xsen(ln(x)) - I$

Asm obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para I y J:

$$\begin{array}{ccccc} I & - & J & = & xcos(ln(x)) \\ I & + & J & = & xsen(ln(x)) \end{array}$$

De donde obtenemos el resultado:

$$\begin{array}{ccc} I & = & \frac{xcos(ln(x)+sen(ln(x))}{2} \\ J & = & \frac{-xcos(ln(x)+sen(ln(x))}{2} \end{array}$$