

CÁLCULO - PRIMAVERA 2006

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliar: Valentina Peredo

CLASE AUXILIAR #4 28 de Agosto

RESUMEN:

- Fórmula de Taylor:

Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f es $(n + 1)$ veces derivable en $x_0 \in (a, b)$. El polinomio de Taylor de orden n de f en x_0 es:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

El error que se comete al aproximar $f(x)$ por $T_n(x)$, se llama Resto y es:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \xi \text{ entre } x_0 \text{ y } x$$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \Rightarrow \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

- Derivadas n-ésimas:

Si $f'(x)$ es la primera derivada, podemos seguir derivando en órdenes superiores una cantidad tal que la derivada de ese orden exista para la función $f(x)$:

$$f^{(0)} = f(x)$$

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$$

Algunas derivadas n-ésimas importantes son:

$$f(x) = x^n \rightarrow f^{(n)}(x) = n!$$

$$f(x) = e^{ax} \rightarrow f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$$

$$f(x) = \text{sen}(x) \rightarrow f^{(n)}(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

$$f(x) = \text{cos}(x) \rightarrow f^{(n)}(x) = \text{cos}\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Propiedades:

$$1) (f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$$

$$2) (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad (\text{Regla de Leibnitz})$$

Problema 1. Analizar el comportamiento de $f(x) = \frac{1}{\sin^3(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\cos^3(\frac{x}{2})}$

Solución 1. :

Para este problema les recomiendo que grafiquen la función $\sin(x)$ y $\cos(x)$ juntas, ya que varios resultados son más fáciles verlos en el gráfico.

- Dominio:

La función es de período 4π , por lo que basta analizarla en $[0, 4\pi]$. Por esta razón trabajaremos en el dominio restringido: $D(f) = [0, 4\pi] - \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\}$

- Ceros:

$$f(x) = \frac{\sin^3(\frac{x}{2}) + \cos^3(\frac{x}{2})}{\sin^3(\frac{x}{2}) \cos^3(\frac{x}{2})} = 0,$$

por tanto, $f(x) = 0 \leftrightarrow \sin^3(\frac{x}{2}) + \cos^3(\frac{x}{2}) = 0 \leftrightarrow \sin(\frac{x}{2}) + \cos(\frac{x}{2}) = 0$, pues el otro factor no tiene raíces reales. Esto implica: $\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}$ y $\frac{x}{2} = \frac{7\pi}{4}$, es decir, $x = \frac{3\pi}{2}$ y $x = \frac{7\pi}{2}$

- Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{3 \sin^5(\frac{x}{2}) - \cos^5(\frac{x}{2})}{2 \sin^4(\frac{x}{2}) \cos^4(\frac{x}{2})} = 0,$$

Se anula para $\sin(\frac{x}{2}) = \cos(\frac{x}{2})$, es decir, para $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{5\pi}{2}$

- Crecimiento:

La derivada es positiva para los x tales que $\sin(\frac{x}{2}) > \cos(\frac{x}{2})$, lo que implica, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$.

x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	$(2\pi, \frac{5\pi}{2})$	$(\frac{5\pi}{2}, 3\pi)$	$(3\pi, \frac{7\pi}{2})$	$(\frac{7\pi}{2}, 4\pi)$
$f'(x)$	—	+	+	+	+	—	—	—
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow	\searrow	\searrow	\searrow

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \left(\frac{15 + 9 \cos(x)}{8} \right) \left[\operatorname{cosec}^5\left(\frac{x}{2}\right) + \sec^5\left(\frac{x}{2}\right) \right],$$

el primer factor no se anula, pues si lo hiciera tendríamos $\cos(x) = \frac{-15}{9}$, lo que no

puede ser. Por lo tanto debe anularse el segundo factor, lo que sucede cuando $\sin(\frac{x}{2}) = -\cos(\frac{x}{2})$, así $\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ y entonces, tenemos como candidatos a puntos de inflexión $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$.

- Concavidad/Convexidad:

Para determinar el signo de f'' basta calcular la f'' en algunos puntos estratégicos, como ya hemos hecho en otros problemas.

$$f''(\frac{5\pi}{4}) = -323,778 < 0$$

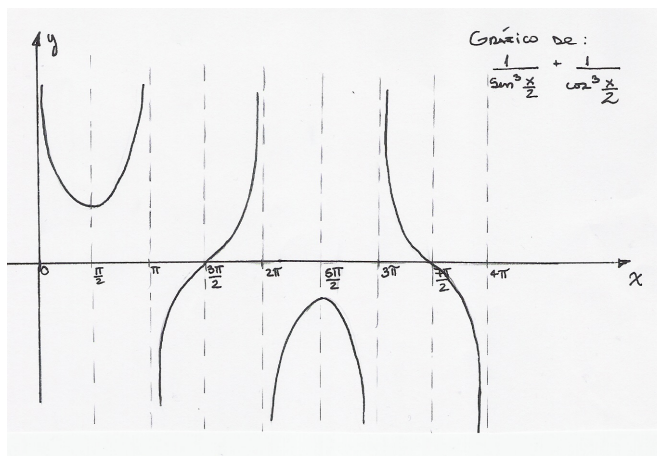
$$f''(\frac{7\pi}{4}) = 323,778 > 0$$

$$f''(\frac{13\pi}{4}) = 323,778 > 0$$

$$f''(\frac{15\pi}{4}) = -323,778 < 0.$$

Por lo tanto la función tiene: en $(\frac{\pi}{2}, 4\sqrt{2})$ un mínimo y en $(\frac{5\pi}{2}, -4\sqrt{2})$ un máximo. y los puntos de inflexión son: $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{7\pi}{2}, 0)$.

- Gráfico:



Problema 2. Determine el intervalo de números reales para que la fórmula $\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25}$ de un resultado con 3 decimales exactos.

Solución 2. :

$$f(x) = \sqrt[5]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(1+x)^{-\frac{4}{5}}$$

$$f''(x) = \frac{-4}{25}(1+x)^{-\frac{9}{5}}$$

$$f'''(x) = \frac{36}{125}(1+x)^{-\frac{14}{5}}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + R_3(x) = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + R_3(x)$$

$$|R_3(x)| = \left| \frac{f'''(\xi_x)(x-x_0)^3}{3!} \right|$$

En nuestro caso $x_0 = 0$ y la tercera derivada ya la calculamos, entonces queda:

$$\begin{aligned}
|R_3(x)| &= \left| \frac{36}{125} (1 + \xi_x)^{-\frac{14}{5}} \frac{x^3}{3!} \right| \quad \xi_x \text{ está entre 0 y } x: \\
\Rightarrow |R_3(x)| &= \left| \frac{6}{125} (1 + \xi_x)^{-\frac{14}{5}} x^3 \right| \underbrace{\leq}_{\xi_x=0} \left| \frac{6x^3}{125} \right| < 10^{-3} \\
\Rightarrow |x^3| &< \frac{125}{6 \cdot 10^3} = \frac{5^3}{6 \cdot 10^3} = \frac{1}{6 \cdot 2^3} \\
\Rightarrow |x| &< \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{6}}
\end{aligned}$$

Problema 3. Calculando la derivada n-ésima de x^{2n} de dos formas distintas, demuestre que:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Solución 3.

Primera forma: Derivemos hasta encontrar una recurrencia:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{2n} \\
f'(x) &= 2nx^{2n-1} \\
f''(x) &= 2n(2n-1)x^{2n-2} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= 2n(2n-1)(2n-2) \dots (2n-(k-1))x^{2n-k} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!} x^{2n-k}
\end{aligned}$$

Luego para $k = n$ tenemos:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n$$

Segunda forma: $f(x) = x^n \cdot x^n$. Apliquemos Regla de Leibnitz

$$f^{(n)}(x) = (x^n \cdot x^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(2-k)} (x^n)^{(k)}.$$

Pero tenemos que $(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$. Con esto la expresión anterior queda

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{n! x^k}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{(n-k)} = n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2. \text{ Obtenemos}$$

$$f^{(n)}(x) = n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

Ahora igualando la primera y la segunda forma de calcular la derivada n-ésima de x^{2n} obtenemos el resultado pedido.

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Problema 4.

a) Determinar el polinomio de Taylor en torno a 0 y encontrar el resto para la función

$$f(x) = \ln(1+x).$$

b) Encontrar el error que se comete al calcular $\ln(1,1)$ mediante P_3 .

Solución 4. :

a) Lo primero que debemos hacer es encontrar las derivadas k -ésimas de f , para encontrar los coeficientes a_k .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x+1} \rightarrow f'(0) = 1 = 0! \\ f''(x) &= \frac{-1}{(x+1)^2} \rightarrow f''(0) = -1 = -(1!) \\ f'''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} \rightarrow f'''(0) = 2 = 2! \\ f^{(iv)}(x) &= \frac{-2 \cdot 3}{(x+1)^4} \rightarrow f^{(iv)}(0) = -2 \cdot 3 = -(3!) \end{aligned}$$

\vdots

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+1)^k} \rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{(k-1)}(k-1)!$$

Con esto, f queda de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{(k-1)}(k-1)!x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{(k-1)}x^k}{k} + \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^n} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{b) } |R_3(x)| = \left| \frac{(-1)^3 x^{3+1}}{(3+1)(1+\xi)^{3+1}} \right| = \frac{|x|^4}{4(1+\xi)^4}. \text{ Ahora para } x=0,1 \text{ tenemos:}$$

$$|R_3(0,1)| \leq \frac{(0,1)^4}{4}$$

, pues $\xi \in (0,0.1)$.