

CÁLCULO - PRIMAVERA 2006

Profesor: Jorge San Martín
Auxiliar: Valentina Peredo

CLASE AUXILIAR #3 18 de Agosto

RESUMEN:

- Teorema del valor medio(TVM)

Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , con $g(a) \neq g(b)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

En particular si $g(x) = x$ entonces:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- Teorema(Monotonía)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) .

i) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a, b]$.

ii) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a, b]$.

- Teorema(Covexidad/Concavidad)

Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y 2 veces derivable en (a, b) .

i) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es cóvexa en $[a, b]$.

ii) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b) \Rightarrow f$ es cóncava en $[a, b]$.

- Corolario: Determinación de Máximos y mínimos con la primera derivada
Sea f una función derivable en un intervalo $[a, b]$ tal que f' es continua en $[a, b]$.
 - i) Si $f'(x) > 0$ en (a, x_0) y $f' < 0$ en $(x_0, b) \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en x_0 .
 - ii) Si $f'(x) < 0$ en (a, x_0) y $f' > 0$ en $(x_0, b) \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en x_0 .
- Corolario: Determinación de máximos y mínimos con la segunda derivada
Sea f función con f'' continua en $[a, b]$ y x_0 un punto crítico de f .
 - i) Si $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en x_0
 - ii) Si $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en x_0
 - iii) Si $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ no hay información.

Problema 1. Usando el TVM, demuestre las siguientes desigualdades:

- (a) $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (b) $-x \leq \sin(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

Solución 1. :

(a) Sea $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $f'(x) > 1$ si $x > 0$ y $f'(x) < 1$ si $x < 0$. Apliquemos el TVM con:

$$a = 0, b = x$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0) \quad x_0 \in (0, x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(x_0) > 1 \quad x_0 \in (0, x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{x} = e^{x_0} > 1$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > x \Leftrightarrow e^x > 1 + x$$

Tenemos la desigualdad para los $x > 0$, y tiene que ser $\forall x \in \mathbb{R}$. veamos que pasa con los $x < 0$, procedamos del mismo modo:

$$a = x, b = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(0) - f(x)}{-x} = f'(x_0) < 1 \quad x_0 \in (x, 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - e^x}{-x} = e^{x_0} < 1$$

$$\Rightarrow 1 - e^x < -x \Leftrightarrow e^x > 1 + x$$

Y para $x=0$ se cumple directamente la igualdad ($1=1$).

$$\Rightarrow 1 + x \leq e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(b) Sea $f(x) = \sin(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$. Aplicando el TVM con $a=0, b=x$. Nos queda:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(x_0) \quad x_0 \in (0, x)$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = \cos(x_0)$$

Pero $-1 \leq \cos(x_0) \leq 1$. Luego $-x \leq \sin(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$

Problema 2. Sea f continua en $[0, \infty)$ y derivable en $(0, \infty)$ y f' es creciente en $(0, \infty)$ con $f(0) = 0$. Utilice el teorema del valor medio para probar que $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}, \forall x \in (0, \infty)$. Concluya que f es creciente en $(0, \infty)$.

Solución 2. :

Para $x \in (0, \infty)$, se cumplen la hipótesis del TVN en $[0, x]$, luego, $\exists c \in (0, x)$ tal que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$, pero como $f(0) = 0$, se tiene que $\frac{f(x)}{x} = f'(c)$. Como $c < x$ se tiene que $f'(c) \leq f'(x)$, pues f' es creciente en $(0, \infty)$, por lo tanto $f'(x) \geq f'(c) = \frac{f(x)}{x}$ para

todo $x > 0$.

Ahora demostremos que f es creciente. Sabemos que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{x}\right)' &= \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} \\ &= \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x}\end{aligned}$$

Como $f'(x) - \frac{f(x)}{x} \geq 0$ (demostrado anteriormente) y $x > 0$ se tiene que $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' \geq 0$, con lo cual $\frac{f(x)}{x}$ es creciente. Si $x \leq y$ entonces $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(y)}{y}$, es decir, $f(x) \leq f(y) \underbrace{\frac{x}{y}}_{\leq 1}$,

con lo cual f es creciente en $(0, \infty)$.

Problema 3. Analizar el comportamiento de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Solución 3. :

- Dominio:

$$f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 2] \Leftrightarrow D(f) = [-2, 2]$$

- Ceros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

- Signo de f :

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D(f)$$

- Puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Continuidad:

f es continua en todo su dominio por algebra y composición de funciones continuas.

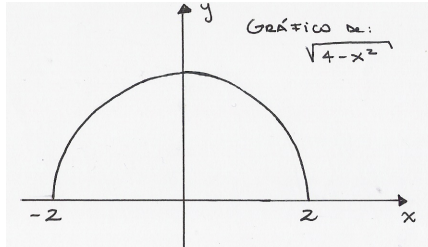
- Crecimiento:

$f'(x) > 0$ si $x < 0$ y $f'(x) < 0$ si $x > 0$. Entonces en $x = 0$ la función alcanza su máximo valor $f(0) = 2$.

- Concavidad/Convexidad:

$f''(x) = \frac{-4}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$, vemos que siempre es negativa, por lo que la curva es cóncava.

- Gráfico:



Problema 4. Analizar la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$

Solución 4. :

Escribamos $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x-2)}$

- Dominio:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$$

- Ceros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Signos de f:

El numerador cambia de signo en $x = 0$ y el denominador en $x = -1$ y $x = 2$, y f es continua en su dominio. Calculemos los valores de f en cada subintervalo.

$(-\infty, -1)$ f es negativa ya que $f(-2) = -2 < 0$.

$(-1, 0)$ f es positiva ya que $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{10} > 0$.

$(0, 2)$ f es negativa ya que $f(1) = -\frac{1}{2} < 0$.

$(2, \infty)$ f es positiva ya que $f(3) = \frac{27}{4} > 0$.

- Puntos críticos:

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - x - 2) - (2x - 1)x^3}{((x + 1)(x - 2))^2}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3 - 6x^2}{\left((x+1)(x-2)\right)^2}$$

$$= \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{\left((x+1)(x-2)\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x^2 - 2x - 6 = 0$$

Resolviendo la ecuación nos queda:

$x_1 = 0, x_2 = 1 + \sqrt{7}, x_3 = 1 - \sqrt{7}$ son puntos críticos.

- Continuidad:

f es continua para todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq -1$ y $x \neq 2$, por composición de funciones continuas y por algebra de funciones continuas.

- Crecimiento:

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{\left((x+1)(x-2)\right)^2}$$

Los cambios dependen de $(x^2 - 2x - 6)$, y son en x_2 y x_3 . Haciendo una tabla queda:

x	$(-\infty, 1 - \sqrt{7})$	$(1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7})$	$(1 + \sqrt{7}, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	\nearrow	\searrow	\nearrow

- Concavidad/Convexidad:

$$f''(x) = \frac{6x(x^2 + 2x + 4)}{(x+1)^3(x-2)^3}$$

Puntos de inflexión: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x^2 + 2x + 4 = 0$ (cuyas soluciones pertenecen a los complejos)

$(x^2 + 2x + 4)$ siempre es $\geq 0 \Rightarrow$ el signo va a depender del denominador

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	\cap	\cup	\cap	\cup

Entonces f tiene un máximo en $x = 1 - \sqrt{7}$ y un mínimo en $x = 1 + \sqrt{7}$

- Asíntotas y límites complementarios:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x^2 - 2x - 6)}{\left((x+1)(x-2)\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(se usó L'Hopital para resolver el límite).

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - x - 2} - x \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(También se usó L'Hopital).

$\Rightarrow y = mx + n = x + 1$ es una asíntota oblicua.

Otros límites:

$$- \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{2} = -\infty$$

$$- \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2} = \infty$$

- Gráfico:

