

## CLASE AUXILIAR #2 11 de Agosto

### RESUMEN:

- Reglas de L'Hopital:

Sean  $f$  y  $g$  derivables en  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $x \neq x_0$ . Entonces:

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$  entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Siempre que tengamos límites de la forma L'Hopital  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$  podemos aplicar estas reglas. Si tenemos límites  $0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$  hay que llevarlos a una forma L'Hopital.

- Máximos y Mínimos:

–  $x_0$  se dice punto mínimo de  $f$  en  $A \subseteq \mathbb{R}$  si  $(\forall x \in A)$ ,  $f(x) \geq f(x_0)$

–  $x_0$  se dice punto máximo de  $f$  en  $A \subseteq \mathbb{R}$  si  $(\forall x \in A)$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$

TEOREMA: Si  $x_0$  es punto de máximo (mínimo) y  $f$  es derivable en  $x_0$ , entonces  $f'(x_0) = 0$ .

**Problema 1.** Calcular:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin(x)^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax^2} - e^{bx^2}}{x \ln(1+x)}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x + e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

**Solución 1. :**

a) Primero veamos si es de la forma L'Hopital. Evaluando en 0, nos queda el límite de la forma  $\frac{0}{0}$ , entonces podemos aplicar la regla:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin(x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - (\cos(x) + x(-\sin(x)))}{2 \sin(x) \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(x) + x \sin(x)}{2 \sin(x) \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \cos(x)}$$

Evaluando nuevamente en 0, vemos que queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \cos(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin(x)^2} = 0$$

b) Es de la forma  $\frac{0}{0}$  entonces aplicando la regla queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax^2} - e^{bx^2}}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2axe^{ax^2} - 2bx e^{bx^2}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}}$$

Evaluando en 0, queda  $\frac{0}{0}$ , entonces nuevamente derivamos:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2a(e^{ax^2} + x2axe^{ax^2}) - 2b(e^{bx^2} + x2bx e^{bx^2})}{\frac{1}{1+x} + \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2}}$$

Evaluando en 0, no es de la forma L'Hopital y da:

$$= (a - b)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax^2} - e^{bx^2}}{x \ln(1+x)} = (a - b)$$

c) Vemos que evaluando en  $\infty$  este l'es de la forma  $\infty^0$ . En estos casos lo típico es tomar el logaritmo a la función y después aplicar la exponencial, ya que  $e^{\ln(f(x))} = f(x)$  (esto lo podemos hacer ya que, el logaritmo y la exponencial son funciones continuas y podemos meterlas en el límite ( $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(f(x)) = \exp(\lim_{x \rightarrow 0} f(x))$ ). De esta manera tenemos:

$f(x) = (x + e^x + e^{2x})^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln(f(x)) = \frac{1}{x} \ln(x + e^x + e^{2x})$ . Esto si es de la la forma L'Hopital( $\frac{\infty}{\infty}$ ), entonces aplicando la regla:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + e^x + e^{2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x + e^x + e^{2x}} (1 + e^x + 2e^{2x})}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^x + 2e^{2x}}{x + e^x + e^{2x}}$$

Es denuevo  $\frac{\infty}{\infty}$ , derivando nuevamente:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 4e^{2x}}{1 + e^x + 2e^{2x}}$$

Otra vez es  $\frac{\infty}{\infty}$ , derivamos:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 8e^{2x}}{e^x + 4e^{2x}}$$

No seguimos derivando ya que podemos ver que siempre va a ser de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ ,

por ser exponenciales. Pensemos un poco...podemos factorizar arriba y abajo por  $e^{2x}$  y así nos queda:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}(e^{-x}+8)}{e^{2x}(e^{-x}+4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}+8}{e^{-x}+4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x + e^{2x})^{\frac{1}{x}} = e^2. (\text{Recordar que } e^{\ln(f(x))} = f(x))$$

d) Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x}{2} = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ , se tiene una expresión de la forma  $1^\infty$ , sin embargo:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \exp \left( \ln \left[ \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \right] \right) \\ &= \exp \left( \frac{1}{x} \ln \left[ \frac{a^x + b^x}{2} \right] \right) \end{aligned}$$

y como  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[ \frac{a^x + b^x}{2} \right] = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ , se tiene una expresión de la forma  $\frac{0}{0}$ , aplicando la regla de L'Hopital a  $\frac{1}{x} \ln \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left[ \frac{a^x + b^x}{2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{a^x + b^x} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b}{a^x + b^x} \\ &= \frac{\ln a + \ln b}{2} \\ &= \ln \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Como exp es una función continua,  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(f(x)) = \exp(\lim_{x \rightarrow 0} f(x))$ , luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \exp(\ln \sqrt{ab}) = \sqrt{ab}$$

**Problema 2.** Con un trozo de material rectangular, se forma una caja abierta suprimiendo de cada esquina cuadrados iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir de esta manera, si el material tiene dimensiones a(largo) y b(ancho).

**Solución 2. :**

Nos están pidiendo maximizar el volumen, entonces lo primero es determinar la función  $V(x)$  y luego calcular su primera derivada para encontrar los puntos críticos y luego evaluar los puntos en la función y ver con cual,  $V(x)$  es mayor, entonces:

El volumen de la caja corresponde a:

$$V(x) = (a - 2x)(b - 2x)x = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx$$

Su primera derivada es:

$$V'(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$$

Resolviendo la ecuación cuadrática  $V'(x) = 0$  nos dan dos soluciones  $x_1 = \frac{(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$  y  $x_2 = \frac{(a+b) - \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$  con  $x_1 \geq 0$  y  $x_2 \geq 0$ . Al evaluar en  $V(x)$  se tiene que  $V(x_1) \leq V(x_2)$ , por lo tanto  $x_2$  es un máximo y  $x_1$  un mínimo. Finalmente las dimensiones óptimas son largo  $a-2x_2$ , ancho  $b-2x_2$  y alto  $x_2$ .

Otra manera de determinar si es un máximo o mínimo es analizar la segunda derivada, en este caso tenemos que:

$$V''(x_1) = 6\sqrt{a^2 + b^2 - ab} \geq 0, \text{ entonces corresponde a un mínimo}$$

$$V''(x_2) = -6\sqrt{a^2 + b^2 - ab} \leq 0, \text{ entonces corresponde a un máximo.}$$

**Problema 3.** Se desea construir un estanque cilíndrico de capacidad 1000 metros cúbicos. Los costos de construcción son los siguientes: r la tapa, q el manto y p la tapa. Calcular las dimensiones del estanque tales que los costos de construcción sean los mínimos y se satisfagan los requerimientos de capacidad pedidos.

**Solución 3. :**

Lo primero que debemos hacer es modelar el problema, definiendo las variables. Sea  $y$  la altura del estanque y  $x$  el radio basal del estanque. Tenemos dos variables y como sólo sabemos minimizar en una variable, debemos usar alguna condición del problema que ligue a las variables  $x$  e  $y$ . En este caso la ligadura de las variables viene dada por la restricción de capacidad del estanque. Sea  $V_0$  la capacidad del estanque. Entonces tenemos:  $V_0 = \pi x^2 y \Rightarrow y = \frac{V_0}{x^2}$   
*Ahora debemos escribir la función que queremos minimizar, en este caso los costos de construcción del estanque.*

$$C(x) = \text{Costo tapa} + \text{Costo manto} + \text{Costo fondo}$$

$$C(x) = \pi x^2 r + 2\pi x y q + \pi x^2 p$$

$$C(x) = \pi x^2 (r + p) + \frac{2V_0 q}{x}$$

Lo siguiente es encontrar los puntos críticos. Como  $x \in (0, \infty)$  los puntos críticos están dados cuando  $C'(x) = 0$ .

$$C'(x) = 2\pi x(r + p) - \frac{2V_0 q}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt[3]{\frac{V_0 q}{\pi(r+p)}}$$

Analizando la segunda derivada comprobamos que  $V''(x^*) = 2\pi(r + p) + \frac{4V_0 q}{x^{*3}} \geq 0$  entonces  $x^*$  efectivamente corresponde a un mínimo. Luego las dimensiones óptimas son:

$$\text{RADIO} = \sqrt[3]{\frac{V_0 q}{\pi(r + p)}}$$

$$\text{ALTURA} = \frac{V_0}{\pi x^*}$$