

CLASE AUXILIAR #1 4 de Agosto

RESUMEN:

- Definición: Diremos que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $\bar{x} \in (a, b)$ ssi $\forall x \in (a, b)$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

(recordar hacer el límite por ambos lados)

- Definición: Diremos que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $\bar{x} \in (a, b)$, si existe el límite

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

- Operador L:

Se define como:

$$L(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Propiedades:

$$L(f(x)g(x)) = L(f(x)) + L(g(x))$$

$$L\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = L(f(x)) - L(g(x))$$

$$L(cf(x)) = cL(f(x)) \text{ con } c = \text{constante}$$

- Fórmula de Leibnitz:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Problema 1. Dado $n \in \mathbb{N}$ considere la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Probar que:

- i) f es continua en 0 ssi $n \geq 1$
- ii) f es derivable en 0 ssi $n \geq 2$
- iii) f' es continua en 0 ssi $n \geq 3$

Solución 1. :

i) Pdq: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x^n}_{\rightarrow 0 \text{ si } n \geq 1} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotado}} = 0$$

ii) Pdq: $f'(0)$ existe.

Si $x \neq 0$

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^n \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2}$$

Si $x = 0$ (Usando la definicion)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^n \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h^{n-1}}_{\rightarrow 0 \text{ si } n \geq 2} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h}\right)}_{\text{acotado}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

iii) Pdq: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(n \cdot \underbrace{x^{n-1}}_{\rightarrow 0 \text{ si } n \geq 2} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotado}} - \underbrace{x^{n-2}}_{\rightarrow 0 \text{ si } n \geq 3} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{acotado}} \right) = 0$$

Problema 2. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^n(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f , su derivada y la continuidad de la derivada de f

Solución 2. :

i) Continuidad:

Si $x \neq 0$ f es continua por algebra de funciones continuas

Si $x = 0$ Pdq: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x) + \cos^2(x) + \dots + \cos^{n-1}(x))}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{(1 - \cos(x))}{x^2}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(x)}_{\text{acotado}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ii) Derivada:

Si $x \neq 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-n \cos^{n-1}(x)(-\sin(x))x - 1(1 - \cos^n(x)))}{x^2} \\
&= \frac{n \cos^{n-1}(x) \sin(x)x - (1 - \cos^n(x))}{x^2} \\
&= \frac{n \cos^{n-1}(x) \sin(x)}{x} + \frac{\cos^n(x) - 1}{x^2}
\end{aligned}$$

Si $x = 0$

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+0) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n(h)}{h^2} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - \cos(h)}{h^2}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{(1 + \cos(x) + \dots + \cos^{n-1}(x))}_{\rightarrow n} \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

iii) Derivada de f' :

Si $x \neq 0$ f' es continua por algebra de funciones continuas

Si $x = 0$ Pdq: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) = \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(n \cos^{n-1}(x) \frac{\sin(x)}{x} + \frac{\cos^n(x) - 1}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(n \cdot \underbrace{\cos^{n-1}(x)}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{\frac{\cos(x) - 1}{x^2}}_{\rightarrow \frac{-1}{2}} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \cos^k(x)}_{\rightarrow n} \right) \\
&= n - \frac{n}{2} \\
&= \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Problema 3. Calcular $f^{(4)}(1)$ para $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

Solución 3. :

$$f(x)x^2 = e^x$$

$$(f(x)x^2)^{(4)} = e^x$$

Usando la fórmula de Leibnitz

$$\binom{4}{0}x^2 f^{(4)}(x) + \binom{4}{1}2x f^{(3)}(x) + \binom{4}{2}2f^{(2)}(x) = e^x$$

Evaluable en $x=1$

$$1 \cdot 1 \cdot f^{(4)}(1) + 8 \cdot 1 \cdot f^{(3)}(1) + 12 \cdot f^{(2)}(1) = e$$

Ahora de la misma manera se calcula $f^{(3)}(1), f^{(2)}(1)$ y $f^{(1)}(1)$

$$f^{(3)}(1) = e - 6f^{(2)}(1) - 6f^{(1)}(1)$$

$$f^{(2)}(1) = e - 4f^{(1)}(1) - 2f(1)$$

$$f^{(1)}(1) = e - 2f(1)$$

Reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned} f^{(4)}(1) &= 120f(1) - 67e \\ &= 53e \end{aligned}$$

Problema 4. Calcular la derivada n-ésima de $\arctan(x)$

Solución 4. :

Sabemos que la derivada de $\arctan(x)$ es:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\underbrace{\arctan'(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(1+x^2)}_{h(x)} = 1$$

Usando la fórmula de Leibnitz:

$$(g(x)h(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0}(1+x^2)g^{(n)}(x) + \binom{n}{1}2xg^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}2g^{(n-2)}(x) = 0$$

$$\Rightarrow g^{(n)} = \frac{-2xng^{(n-1)} - n(n-1)g^{(n-2)}}{1-x^2}$$

Encontramos la derivada n-ésima de $\arctan'(x)$, entonces $g^{n-1}(x)$ corresponde a la derivada n-ésima de $\arctan(x)$.

Problema 5. Usando el operador L encontrar $f'(x)$ siendo $f(x) = \frac{x^3 \arctan(ax)}{\sqrt{x^2+1}}$

Solución 5. :

$$\begin{aligned}
 L(f(x)) &= L(x^3) + L(\arctan(\alpha x)) - L(\sqrt{x^2 + 1}) \\
 &= 3L(x) + L(\arctan(\alpha x)) - \frac{1}{2}L(x^2 + 1) \\
 &= 3\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{1+(\alpha x)^2}\alpha}{\arctan(\alpha x)} - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1} \\
 &= \frac{3}{x} + \frac{\alpha}{\arctan(\alpha x)(1 + (\alpha x)^2)} - \frac{x}{1 + x^2}
 \end{aligned}$$

Calculamos $L(f(x))$, multiplicando $L(x) \cdot f(x)$ y se obtiene $f'(x)$

Problema 6. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación $e^{2 \arcsin(yx)} = \ln(1 + x^2 + y^2)$ en el punto p donde la curva intersecta al eje de las abscisas, con abscisa positiva

Solución 6. :

Notar que $y=y(x)$

Primero buscar el punto p (con coordenadas $(\bar{x}, 0)$) que intersecta con las abscisas, para esto hacemos $y=0$ y buscamos \bar{x}

$$1 = \ln(1 + \bar{x}^2)$$

$$e = 1 + \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \pm\sqrt{e - 1}$$

$$\Rightarrow p = (\sqrt{e - 1}, 0)$$

(Se eligió la abscisa positiva)

La recta tangente corresponde a:

$$(y - \bar{y}) = f'(\bar{x})(x - \bar{x})$$

Ahora hay que encontrar $y'(x)=f'(x)$, y luego evaluar en \bar{x}

Derivando la ecuación queda:

$$e^{2 \arcsin(yx)} \frac{2}{\sqrt{1 - (yx)^2}}(y'x + y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}(2x + 2yy')$$

Evalutando en p :

$$y'(\sqrt{e - 1}) = \frac{\sqrt{e - 1}}{1 + e - 1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{e}$$

La recta tangente es:

$$y - 0 = \frac{1}{e}(x - \sqrt{e - 1})$$