

Algunos Ejercicios Resueltos para C2.

Profesor: María Leonor Varas

Auxiliares: Sebastian Astroza & Diego Morán

P1 Sean $a \in \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto numerable. Pruebe que el conjunto

$$A_{a,B} = \{a + b \in \mathbb{R} / b \in B\}$$

es un conjunto numerable.

Sol: Tenemos por lo menos 4 formas de probar que $A_{a,B}$ es numerable:

- *₁ Encontrar una función **biyectiva** entre $A_{a,B}$ y algún conjunto **numerable** que se nos ocurra (por ejemplo pueden ser: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, \mathbb{N} , \mathbb{Q} , $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$, *etc*, y en este caso particular, B).
- *₂ Encontrar una función **biyectiva** entre algún conjunto **numerable** que se nos ocurra y $A_{a,B}$.
- *₃ Verificar que $A_{a,B}$ es un conjunto **infinito** (o sea que no es finito...) y encontrar alguna función **inyectiva** entre $A_{a,B}$ y algún conjunto numerable.
- *₄ Verificar que $A_{a,B}$ es un conjunto **infinito** y que $A_{a,B}$ es **subconjunto** de algún conjunto **numerable**.

OBS: De las propiedades anteriores, vemos que la ventaja de demostrar que algo tiene cardinalidad numerable, es que sólo nos basta encontrar una función **inyectiva**, lo que puede ser mucho más fácil que encontrar una función **biyectiva**.

En este tipo de ejercicios, lo más difícil es encontrar el conjunto numerable y la función (inyectiva o biyectiva) que necesitamos para probar la numerabilidad; ésto depende mucho del problema particular que estemos resolviendo. El consejo es observar bien el conjunto que queremos probar que es numerable y pensar que conjunto numerable le podemos relacionar.

Nosotros queremos probar que $A_{a,B}$ es numerable. Si lo estudiamos un poco, nos damos cuenta de que sus elementos pueden ser tanto racionales como irracionales; luego no podríamos decir, por ejemplo, que $A_{a,B} \subseteq \mathbb{Q}$ (osea no podríamos usar *₄ con el numerable \mathbb{Q}), se podría decir que \mathbb{Q} no es el conjunto adecuado para relacionarlo con $A_{a,B}$. Seguimos buscando. . .

Nos damos cuenta de que un conjunto numerable que se relaciona mucho con $A_{a,B}$ es el conjunto B , pues $A_{a,B}$ se define a partir de B . ¿Podemos decir que $A_{a,B} \subseteq B$? En general, NO (esto depende mucho de lo que sean a y B); o sea no podríamos ocupar $*_4$ con $B \dots$

Mejor intentemos encontrar una función entre $A_{a,B}$ y B^1 .

IDEA para encontrar la función: los elementos de B son como los elementos de $A_{a,B}$ menos el número a . O sea, dado un elemento en $A_{a,B}$, para transformarlo en uno de B hay que restarle a .

Se nos ocurre la siguiente función²:

$$f : A_{a,B} \rightarrow B$$

$$f(x) = x - a$$

¿Está bien definida como función? Si, pues a cada $x \in A_{a,B}$ le asigna una sólo imagen $f(x)$ y además esta imagen efectivamente es un elemento del conjunto de llegada B (Ejercicio: Verificarlo!!!).

Se tiene lo siguiente:

- Esta función es inyectiva (Ejercicio).
- El conjunto $A_{a,B}$ es infinito, pues

$$A_{a,B} = \{a + \text{primer elemento de } B, a + \text{segundo elemento de } B \dots$$

y como B es infinito se concluye.

Luego, usando $*_3$ concluimos que $A_{a,B}$ es numerable.

OBS: En este caso la función que encontramos también es epiyectiva, luego podríamos haber usado $*_1$, ya que tendríamos $f : A_{a,B} \rightarrow B$ **biyectiva** o, equivalentemente, $|A_{a,B}| = |B|$, :D.

¹La resolución del ejercicio comienza en esta línea; el resto eran recuerdos de la materia y posibles ideas de como resolver el problema, :).

²Hay que probar que es función, es decir, ver que está bien definida

A continuación veremos un ejemplo de un tipo de problemas de inducción, los de divisibilidad. Lo resolveremos de varias formas.

P2 Demuestre que $\forall n \geq 1 \quad 3^{2n} - 1$ es divisible por 8.

Sol: Haremos la demostración por inducción.

Llamemos $P(n) : \forall n \geq 1 \quad 3^{2n} - 1$ es divisible por 8

- **Caso Base:** Hay que ver que la propiedad es cierta para $n = 1$ (osea ver que $P(1)$ es cierto). En efecto,

$$3^{2 \cdot 1} - 1 = 9 - 1 = 8$$

Y como 8 es divisible por 8, la propiedad es cierta para $n = 1$.

- **Paso Inductivo:** Hay que probar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Suponemos entonces que $P(n)$ es cierta (H.I.). Veremos 3 formas de probar que $P(n+1)$ también lo es:

F1: Calculemos:

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2n} \cdot (8+1) - 1 = 3^{2n} \cdot 8 + 3^{2n} \cdot 1 - 1$$

$$\Rightarrow 3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n} \cdot 8 + [3^{2n} \cdot 1 - 1]$$

luego, usando la (H.I.) concluimos que $3^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 8, por ser suma de números divisibles por 8.

F2: La (H.I.) nos dice que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $3^{2n} - 1 = 8k$, o equivalentemente $3^{2n} = 8k + 1$. Usemos esto para probar $P(n+1)$.

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 = (8k + 1) \cdot 9 - 1$$

$$\Rightarrow 3^{2(n+1)} - 1 = 72k + 9 - 1 = 72k + 8 = 8(9k + 1)$$

Como $(9k + 1) \in \mathbb{N}$, entonces concluimos que $3^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 8.

F3: Usaremos la siguiente propiedad:

$$q \mid p \wedge q \mid (r - p) \Rightarrow q \mid r$$

Nosotros tenemos, por (H.I.), $8 \mid (3^{2n} - 1)$, luego para probar que $8 \mid 3^{2(n+1)} - 1$, nos basta ver que $8 \mid [(3^{2(n+1)} - 1) - (3^{2n} - 1)]$.
En efecto,

$$(3^{2(n+1)} - 1) - (3^{2n} - 1) = 3^{2n+2} - 3^{2n} = 3^{2n} \cdot (9 - 1) = 3^{2n} \cdot 8$$

Por lo tanto, $8 \mid [(3^{2(n+1)} - 1) - (3^{2n} - 1)]$.

Lo que prueba que $3^{2(n+1)} - 1$ es divisible por 8.

OBS: $p \mid q$ significa p divide a q , o equivalentemente, q es divisible por p .

Así hemos verificado que el **Caso base** y el **Paso Inductivo** son ciertos, lo que termina la prueba por inducción. Se concluye que la proposición $P(n)$ es cierta $\forall n \geq 1$.

Muchas veces, para probar una proposición $P(n)$, es mucho más sencillo si usamos la *segunda forma del principio de inducción*. Veamos un ejemplo:

P3 Pruebe que todo $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, es un número *primo* o es producto de números primos.

Sol: • **Caso Base:** Veamos si la propiedad es cierta para $n = 2$. Como 2 es un número primo, entonces concluimos que la propiedad es cierta.

• **Paso Inductivo:** supongamos que $\forall k \in \{2, 3, \dots, n\}$ se cumple k es primo o producto de primos (H.I.). Debemos probar que $(n+1)$ es primo o producto de primos.

Caso 1: Si $(n+1)$ es primo, estamos listos³.

Caso 2: $(n+1)$ no es primo, entonces podemos decir que

$$\exists p, q \in \mathbb{N} \text{ con } n+1 > p > 1, n+1 > q > 1 \text{ tal que}$$

³O sea, no hay nada que probar...

$$(n + 1) = p \cdot q$$

lo anterior es cierto pues como $(n+1)$ no es primo, entonces posee al menos 2 divisores distintos de 1 y $(n+1)$; además hay que recordar que si m es divisor de l entonces $1 \leq m \leq l$.

Luego,

Como $2 \leq p \leq n$, podemos decir, por (H.I.), que p es primo o producto de primos.

Como $2 \leq q \leq n$, podemos decir, por (H.I.), que q es primo o producto de primos.

Usando esto último y que $(n + 1) = p \cdot q$ se concluye que $(n+1)$ es producto de primos⁴.

Así, como el **caso base** y el **paso inductivo** son ciertos, hemos terminado la demostración por inducción de que todo número natural $n \geq 2$ es primo o producto de primos.

⁴Producto de producto de primos es producto de primos...

A continuación, un ejercicio atípico de Imagen y PreImagen. Recuerden que esta materia va a ser evaluada en el control y vale la pena recordarla.

P4 Sea $f : E \rightarrow F$ una función. Pruebe que:

$$f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow [(\forall B \subseteq E) f(B^c) = (f(B))^c]$$

Sol: Como debemos demostrar un \Leftrightarrow , demostraremos la implicancia para ambos lados. Primero de izquierda a derecha y luego de derecha a izquierda.

\Rightarrow Usando como hipótesis que f es biyectiva debemos probar que $(\forall B \subseteq E) f(B^c) = (f(B))^c$. Para ellos consideramos un $B \subseteq E$ cualquiera y trataremos de demostrar dos cosas⁵: $f(B^c) \subseteq (f(B))^c$ y $f(B^c) \supseteq (f(B))^c$.

\subseteq Sea $y \in f(B^c)$. Por definición de conjunto Imagen podemos decir que:

$$(\exists x \in B^c) f(x) = y$$

Por inyectividad de f podemos decir que:

$$\overline{(\exists \hat{x} \in B) f(\hat{x}) = y}$$

(Ya que si existiera un $\hat{x} \in B$ tal que $f(\hat{x}) = y$ tendríamos que $f(x) = f(\hat{x}) = y$, usando la inyectividad de f podríamos decir que: $x = \hat{x}$. Lo cual es una contradicción, ya que $x \in B^c \wedge \hat{x} \in B$).

Luego, dándonos cuenta que lo que está dentro de la negación no es más que una forma retorcida de la definición de Imagen, se tiene que:

$$\overline{y \in f(B)}$$

Lo cual es lo mismo a decir que $y \in f(B)^c$. Justamente lo que queríamos probar.

\supseteq Sea $y \in f(B)^c$. Usando definición de complemento y luego la definición de Imagen se tiene:

$$y \in f(B)^c \Leftrightarrow \overline{y \in f(B)} \Leftrightarrow \overline{(\exists x \in B) f(x) = y}$$

⁵Nos aprovecharemos de la propiedad antisimétrica de los conjuntos: $A \subseteq C \wedge C \subseteq A \Leftrightarrow A = C$

Como f es epiyectiva se tiene que $(\forall y \in F) (\exists a \in E) f(a) = y$. En otras palabras, se nos asegura que para todo $y \in F$ encontraremos un $a \in E$ tal que $f(a) = y$. Si ese a no está en B (como lo asegura $(\exists x \in B) f(x) = y$) entonces ese a debe⁶ estar en B^c . Por lo tanto:

$$(\exists a \in B^c) f(a) = y \Leftrightarrow y \in f(B^c)$$

Que es justamente lo que queríamos.

Luego concluimos que $f(B^c) = (f(B))^c$.

\Leftarrow Ahora debemos probar la implicancia hacia la izquierda, osea:

$$[(\forall B \subseteq E) f(B^c) = (f(B))^c] \Rightarrow f \text{ es biyectiva}$$

Usaremos como hipótesis que $(\forall B \subseteq E) f(B^c) = (f(B))^c$ y trataremos demostrar que f es inyectiva y epiyectiva.

Inyectividad Debemos probar que para todo $x_1, x_2 \in E$ se tiene que:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Para ello⁷ tomemos $x_1 \neq x_2$ y $B = \{x_1\}$.

Notemos que $x_2 \in B^c$ (ya que $B = \{x_1\}$ y $x_1 \neq x_2$).

Luego, gracias a la definición de conjunto Imagen, tenemos que:

$$f(x_2) \in f(B^c)$$

pero $f(B^c) = (f(B))^c$ (por hipótesis).

$$\Rightarrow f(x_2) \in (f(B))^c \Leftrightarrow f(x_2) \notin (f(B))$$

Pero $f(B) = f(\{x_1\}) = \{f(x_1)\}$.

Por lo tanto $f(x_2) \neq f(x_1)$.

Epiyectividad Usando la hipótesis tomando $B = \phi$ se tiene que:

$$f(\phi^c) = (f(\phi))^c$$

⁶Recuerde que $E = B \cup B^c$

⁷Y para que nuestra hipótesis sirva de algo

Y en este momento es cuando una pregunta importante debe dominar nuestra mente: ¿Complemento con respecto a qué?.

La función f va de E en F . Como el conjunto Imagen se define sobre subconjuntos del dominio (en este caso el dominio es E) se tiene que $f(\phi^c) = f(E)$.

Por otro lado, sabemos que los conjuntos imagen viven en las partes de F (en otras palabras, todos los conjuntos imagen son subconjuntos del recorrido). Por lo tanto $(f(\phi))^c = \phi^c = F$.

Luego de esta salvedad podemos ver que:

$$f(\phi^c) = (f(\phi))^c \Leftrightarrow f(E) = F$$

Usando la definición del conjunto Imagen:

$$\Leftrightarrow (\forall y \in F) (\exists x \in E) f(x) = y$$

Que es lo mismo que decir que f es epiyectiva.

Por lo tanto f es biyectiva. Lo que completa nuestra demostración.

Por último un ejercicio de sumatorias.

P5 Demuestre que:

$$\sum_{k=0}^7 [(\sqrt{3})^{7-k}(\sqrt{2})^k] = 65(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Sol: Este ejercicio parece estar pintado para ocupar el Teorema del Binomio de Newton⁸, sin embargo ocuparlo es justamente lo que no hay que hacer. Luego de intentar de muchas maneras formar el Binomio de Newton, uno se da cuenta que el camino va por otro lado.

$$\sum_{k=0}^7 [(\sqrt{3})^{7-k}(\sqrt{2})^k] = \sum_{k=0}^7 [(\sqrt{3})^7(\sqrt{3})^{-k}(\sqrt{2})^k] = \sum_{k=0}^7 [(\sqrt{3})^7(\sqrt{\frac{2}{3}})^k]$$

Notemos que $(\sqrt{3})^7$ no depende del índice de la sumatoria (k), por lo que podemos tomarlo como constante y colocarlo afuera:

$$= (\sqrt{3})^7 \sum_{k=0}^7 [(\sqrt{\frac{2}{3}})^k]$$

Y ahora no es más que ocupar la suma geométrica!!

$$= (\sqrt{3})^7 \frac{1 - (\sqrt{\frac{2}{3}})^8}{1 - (\sqrt{\frac{2}{3}})}$$

El resto es mera *álgebra*, así que lo vamos a hacer rapidito⁹.

$$= 65(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

Suerte en el control 2!!!!

The End

⁸Recuerde que el Binomio de Newton es tan hermoso como la Venus de Milo

⁹Aunque se contradiga con el nombre del ramo