Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Primer Año 2005
MA11A

Guía N°1: Lógica, Conjuntos e Inducción.

Lógica y Conjuntos.

1. Construya las Tablas de Verdad de las siguientes proposiciones:
   (a) $p \wedge (q \vee r)$
   (b) $(p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$
   (c) $[p \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})] \vee [(q \wedge \bar{p}) \vee (r \wedge \bar{q})]$
   (d) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \vee \bar{q})$

2. Si $p \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow F$ encuentre el valor de verdad de:
$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \Rightarrow q)$$

3. Sean p, q, r proposiciones tales que: $p \Leftrightarrow V$, $q \Leftrightarrow F$ y r es una proposición cualquiera. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
   (a) $(p \wedge q) \vee q$
   (b) $(p \vee q) \wedge q$
   (c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
   (d) $(q \vee r) \Rightarrow \overline{(\bar{p} \vee \bar{r})}$

4. Si $p \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow F$, determine el valor de verdad de la siguiente proposición:
$$\overline{[p \vee (\bar{p} \wedge q) \wedge q]} \Rightarrow [(\bar{q} \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow s)]$$

5. Pruebe que las siguientes proposiciones son tautologías:
   (a) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
   (b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$
   (c) $[(p \vee r) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
   (d) $(p \wedge q) \Rightarrow \overline{(\bar{p} \wedge \bar{q})}$
   (e) $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$

6. Determine si las siguientes proposiciones son o no Tautologías.
   (a) $p \Rightarrow (p \vee q)$

(b) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$

(c) $p \Rightarrow (p \wedge q)$

(d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

7. Muestre que:

   (a) $[p \wedge (q \wedge \bar{p})] \Leftrightarrow$

   (b) $[(p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow p$

   (c) $[(p \Rightarrow q) \vee \bar{p}] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

   (d) $\{[p \vee (q \Leftrightarrow \bar{p})] \Rightarrow \bar{q}\} \Leftrightarrow \bar{q}$

8. Pruebe que:

$$[p \vee (\bar{p} \wedge q)] \Leftrightarrow (p \vee q)$$

9. Demostrar las siguientes equivalencias:

   (a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$

   (b) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$

   (c) $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

   (d) $(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

   (e) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)] \vee [(r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Leftrightarrow (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$

10. Se definen los siguientes conectivos lógicos $\bigtriangledown$ y $\bigtriangleup$ de la manera siguiente: $p \bigtriangledown q \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$ y $p \bigtriangleup q \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$. Demostrar que:

    (a) $\bar{p} \Leftrightarrow (p \bigtriangledown p)$

    (b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{(p \bigtriangleup q)}$

11. Se define el conectivo lógico $\oplus$ como: $p \oplus q \Leftrightarrow F$ solamente si $p \Leftrightarrow F$ y $q \Leftrightarrow F$; para cualquier otros valor de p y q $p \oplus q \Leftrightarrow V$. Determine si la siguiente proposición es una Tautología o no:

$$[(p \Rightarrow q) \vee q] \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \oplus \bar{q}]$$

12. Se define el conectivo lógico binario $\star$ por la siguiente tabla:

p	q	p $\star$ q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Muestre lo siguiente:

   (a) $\bar{p} \Leftrightarrow p \star p$

   (b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \star q) \star (p \star q)$

   (c) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \star p) \star (q \star q)$

   (d) $p \star q \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{(p \wedge q)}]$

13. Sea $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Escribir en simbolos matemáticos y averiguar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   (a) Hay un elemento en A que es mayor que los restantes.

   (b) Existe un único elemento en A cuyo cuadrado es 4.

   (c) Para cada elemento en A existe otro en A que es menor o igual que él.

   (d) Existe un elemento cuyo cuadrado es igual a sí mismo.

14. Indique en cuál de los siguientes casos p es condición necesaria y suficiente para q, ie $p \Leftrightarrow q$.

   (a) p: n es múltiplo de 4; q: n es número par.

   (b) p: n y m son números pares; q: $n + m$ es un número par.

   (c) p: n^2 es par; q: n es par.

15. Pruebe que $a \cdot b\ es\ par\ \Leftrightarrow\ (a\ es\ par\ \vee b\ es\ par)$.

16. Demuestre por contradicción la siguiente proposición: "Los 123 residentes de un edificio tienen edades que suman 3813 años, entonces existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100 años".

17. Demuestre por contradicción que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

18. Dada la siguiente proposición: "$\exists n \epsilon \mathbb{N} : (n \leq 1 \Rightarrow n^2 \geq 4n)$". Determine su valor de verdad, luego escriba la proposición negada.

19. Negar las siguientes proposiciones:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R} \ : x^2 > 0$
   (b) $\exists x \in \mathbb{R} : e < x < \pi$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R} \ : x < y$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R} \ : (x + y = 1 \Rightarrow x = -y)$.
   (e) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R} \ : [(x + y) \ es \ par \Rightarrow (x \ es \ par \ \wedge y \ es \ par)]$
   (f) $\exists x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R} \ : (x < y \wedge x^2 \geq y)$
   (g) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ \exists z \in \mathbb{R} \ : (x < y \Rightarrow x + z = y)$

20. Niegue las siguientes proposiciones:

   (a) $\forall m \in \mathbb{Z} : (2m + 1 > 2 \wedge m - 4 \leq 1)$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists y \in \mathbb{R} : (3x + y)$ es par
   (c) $\exists x \in \mathbb{N}, \ \exists y \in \mathbb{Z} : (2x + y = 5 \Rightarrow x \cdot y < 2)$
   (d) $\exists n \in \mathbb{Z}, \ \forall m \in \mathbb{N} : [(n \cdot m > 2) \Leftrightarrow (2n + m \geq 1)]$

21. Considere las funciones proposicionales

$$p(x, y) : x - y > 1 \quad y \quad q(x, y) : 2x + 3y < 2$$

   así como los conjuntos $A = \{2, \ 1, \ -1, \ -3\}$ y $B = \{-4, \ 1, \ -1/2\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   (a) $\exists x \in A, \ \ \forall y \in B : p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$
   (b) $\forall x \in B, \ \ \forall y \in A : \overline{p(x, y)} \vee q(x, y)$
   (c) $\exists x \in A, \ \ \exists y \in B : p(x, y) \Leftrightarrow \overline{q(x, y)}$
   (d) $\forall x \in A, \ \ \exists y \in B : p(x, y) \wedge q(x, y)$
   (e) $\forall x \in B, \ \ \exists y \in B : q(x, y)$
   (f) $\forall x \in B, \ \ \exists y \in A : q(x, y) \Rightarrow p(x, y)$

22. Dadas las funciones proposicionales

$$p(x) : \ x \ es \ par,$$

$$q(x) : \ x \ es \ multiplo \ de \ 5,$$

$$r(x) : x \geq 8.$$

   Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

   (a) $\forall x \in \mathbb{N} : (p(x) \vee r(x))$
   (b) $\forall x \in \mathbb{N} : (\bar{p}(x) \wedge q(x))$
   (c) $\exists n \in \mathbb{N} : (r(n) \Rightarrow q(n))$

(d) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \exists m \in \mathbb{N} : [p(n) \Rightarrow (q(n) \vee r(m))]$

23. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

    (a) $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < 1$
    (b) $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$
    (c) $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq 1$
    (d) $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq a$

24. Sean $a, \ b \in \mathbb{R}$ Muestre que:

    (a) $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a \cdot b \leq \frac{1}{4})$
    (b) $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2})$
    (c) $2a + 4b = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2 \geq \frac{1}{20})$
    (d) $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2})$
    (e) $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (\frac{1}{a}\frac{1}{b}) \cdot (a + b) \geq 4$

25. Pruebe que si $2p = a + b + c$ entonces:

$$1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2p(p - a)}{bc}$$

26. Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| < 1\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x + 2| + 3}{|x|} < 23\}$$

Demuestre que la proposición

$$\forall x \in \mathbb{R}(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

es verdadera.

27. Dados

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| < 1\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |\frac{x + 2}{x} - 5| < \varepsilon\}$$

Determine ε de modo que $A \subseteq B$.

28. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique brevemente su respuesta.

    (a) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(b) $\emptyset \in \emptyset$

(c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(e) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

(f) $\{\emptyset\} \in \emptyset$

(g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

(h) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

(i) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(k) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$

(l) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

(m) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$

(n) $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

29. Sean A, B, y C conjuntos arbitrarios. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

    (a) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \in C$.
    (b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
    (c) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$.
    (d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$.

30. Si A, B, y C son conjuntos tales que $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$ y $(A \cap C^c) \subseteq (B \cap C^c)$. Demuestre que $A \subseteq B$.

31. Sean A, y B conjuntos. Discuta la validez (o no) de las siguientes afirmaciones:

    (a) $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$.
    (b) $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$.
    (c) $A \triangle B = A \Rightarrow B = \emptyset$.
    (d) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

32. Sean A, B, C y D conjuntos.

    (a) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ ¿es cierto siempre que $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$? ¿y que $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$?
    (b) Si $A \subset B$ y $C \subset D$ ¿es cierto siempre que $(A \cup C) \subset (B \cup D)$? ¿y que $(A \cap C) \subset (B \cap D)$?

33. Responda a las siguientes preguntas:

    (a) Si $A \cup B = A \cup C$, ¿es necesario que $B = C$?

(b) Si $A \cap B = A \cap C$, ¿es necesario que $B = C$?

(c) Si $A \triangle B = A \triangle C$, ¿es necesario que $B = C$?

34. Definamos los siguientes conjuntos:

A={ Estudiantes de Matemáticas I }
B={ Estudiantes de Matemáticas II }
C={ Estudiantes De Computación }
D={ Estudiantes de Física I }
E={ Estudiantes de Física II }
F={ Estudiantes que fueron a Fantasilandia }
G={ Estudiantes que se acostaron muy tarde }

Expresar las siguientes proposiciones en función de los conjuntos anteriormente definidos:

(a) Todos los alumnos de Matemáticas I cursan Física I.

(b) Los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.

(c) Sólo los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.

(d) Ningún estudiante de Computación fue a Fantasilandia.

(e) A Fantasilandia fueron sólo estudiantes de Matemáticas I y Física I.

(f) Todos los estudiantes de Física I que no son ni de Matemáticas I ni de Matemáticas II fueron a Fantasilandia.

35. Se sabe que de un grupo de 20 personas, 10 estudian Música, 7 estudian Fotografía, 4 estudian Pintura y Fotografía, 3 estudian Música y Pintura, 2 estudian Fotografía y Música y 1 estudia Música, Fotografía y Pintura. ¿Cúantos estudian sólo Fotografía? ¿Cuántos estudian sólo Pintura?

36. Demostrar las siguientes propiedades del complemento y la diferencia:

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

37. Sean $A,\ B,\ y\ C$ conjuntos arbitrarios. Demuestre las siguientes propiedades:

(a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$.

(b) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

(c) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

38. Sea U un conjunto universo que contiene a $A,\ B,\ y\ C$ (como subconjuntos, no como elementos!!!). Demuestre que:

(a) $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = U$

(b) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

(c) $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B^c \cup C)$

(d) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

39. Pruebe que:

    (a) $A \subset B \Rightarrow \{A \cup (B \setminus A)\} = B$
    (b) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

40. Demuestre las siguientes propiedades:

    (a) $(A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B$
    (b) $A \cap (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cap C)$
    (c) $A = B \Leftrightarrow A \triangle B = \emptyset$
    (d) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \triangle B = A \cup B$

41. Probar que si

$$A \cap X = A \cap Y \ \wedge \ A \cup X = A \cup Y$$

entonces $X = Y$.

Sumatorias e Inducción

En esta sección se pedirá expresar todas las sumas que aparezcan como sumatorias. Ej:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

1. Demostrar que:

    (a) $n^2 + n$ es divisible por 2.
    (b) $n^3 + 2n$ es divisible por 3.
    (c) $n^2 - n + 2$ es divisible por 2.
    (d) $(a - b)$ es factor de $a^n - b^n$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.
    (e) $(a + b)$ es factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

2. Demostrar que todo número natural $n \geq 24$ se puede expresar como la suma de cincos y sietes.

3. Demostrar que para cada $n \geq 0$ el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13

4. Escriba las sumas como sumatorias y demuestre por inducción lo siguiente:

    (a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.
    (b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.
    (c) $1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 5 + \ldots + n(n + 2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.
    (d) $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
    (e) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

(f) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+3+\ldots+n)^2$

5. En cada uno de los siguientes casos escriba las sumas como sumatorias y demuestre, usando inducción, que el enunciado es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $2^n > n$.

   (b) $3 + 4 + 5 + \ldots + (n+2) = \frac{n(n+5)}{2}$.

   (c) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$.

   (d) $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{4^n-1}{3}$.

   (e) $1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$, donde r es una constante distinta de 1.

   (f) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n-3) = n(2n-1)$.

   (g) $3 + 5 + 7 + \ldots + (2n+1) = n(n+2)$.

   (h) $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

   (i) $\frac{1}{1*3} + \frac{1}{3*5} + \frac{1}{5*7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

   (j) $4 + 3 + 2 + \ldots + (5-n) = \frac{n(9-n)}{2}$.

   (k) $-2 - 3 - 4 - \ldots - (n+1) = -\frac{n(n+3)}{2}$.

   (l) $1*2 + 2*3 + 3*4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   (m) $1*2 + 3*4*5*6 + \ldots + (2n-1)*2n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$.

   (n) $\frac{1}{n*(n+1)} + \frac{1}{(n+1)*(n+2)} + \frac{1}{(n+2)*(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2n}$.

   (o) $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$. a y r son constantes, $r \neq 1$.

6. Para $n \in \mathbb{N}$, probar que $n - 2 < \frac{n^2-n}{12}$

7. Sea P(n) la proposición para $n \in \mathbb{N}$: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}$
   Demostrar que la veracidad de P(k) implica la veracidad de P(k+1) para todo $k \geq 1$.
   ¿Es verdadera P(n) para todo $n \in \mathbb{N}$?

8. Probar que la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $(n-2)*180$ grados.

9. Muestre que para
   q(n) : $n^2 - n + 41$ es un número primo,
   q(1) es verdadera pero $q(n) \Rightarrow q(n-1)$ es falso.

10. Muestre que para
    q(n) : $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = (n^2 + n + 2)$
    $q(n) \Rightarrow q(n+1)$ pero que q(1) es falso.

11. A la edad de un año, una pareja (macho y hembra) de comadrejas da origen a dos nuevas parejas de comadrejas y en cada año posterior produce 6 nuevas parejas de comadrejas. Suponga que las comadrejas no mueren y que se comienza con un par de comadrejas recién nacidas, es decir $a_0 = 1$.

    (a) Determine una relación de recurrencia para a_n, la cantidad de comadrejas al final del año n.

    (b) Demuestre por inducción que:

    $$a_n = \frac{1}{5}\left[4^{n+1} - (-1)^{n+1}\right]$$

12. Sea $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{6a_n^2}{a_n^2+8}$, para $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $a_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

13. Supongamos que Ud. recibe una carta de una "cadena", con la lista de los nombres y direcciones de 6 personas. La carta le pide que envie \$1000 a la persona que encabeza la lista. Además, Ud. debe hacer una nueva carta casi idéntica a la recibida, los únicos cambios son suprimir en la lista de nombres el primero de ellos y agregar al final de la lista el nombre suyo al final. Esta carta reformada tiene que enviarla a cinco amigos suyos, distintos de los que aparecen en la carta reformada. La carta original promete a Ud. que recibirá dentro de pocas semanas la cantidad de \$15.625.000.
    Aunque estas "cadenas" nunca funcionan Ud. podría encontrar entretenido verificar si la promesa de la carta original es correcta, bajo el supuesto que Ud. y todos los receptores de las cartas siguieran las instrucciones, es decir, no "rompieran la cadena".
    Podemos llamar c_k a la cantidad de cartas en el eslabón k, siendo la carta que Ud. recibió el eslabón 0, es decir $c_0 = 1$. Las cartas que Ud. envía corresponden al primer eslabón, así $c_1 = 5$, la cantidad de cartas enviadas por sus amigos es c_2, etc.

    (a) ¿Cuál es la relación entre c_k y c_{k+1}?

    (b) Verifique por inducción que $c_k = 5^k$.

    (c) ¿De que eslabón son los receptores de cartas que deberían enviar a Ud. \$1000 cada uno?

14. En una hoja de papel se tiene n rectas distintas dibujadas de borde a borde, de modo que todo par de rectas tiene un punto en común (que no está en el borde de la hoja) y no hay tres (o más) que concurran en un mismo punto.

    (a) Si a_k es la cantidad de regiones en que queda dividida la hoja al tener k rectas. ¿qué relación hay entre a_k y a_{k+1}?

    (b) Determine a_n en términos de n, sin referencia a a_{n-1}.

15. Una "Torre de Hanoi" es un juego consistente de n anillos de distintos tamaños y tres estacas verticales fijas en un tablero A, B, C, alineadas de izquierda a derecha, en las que se colocan los anillos. Al iniciar el juego todos los anillos están en la estaca A, apilados de mayor a menor, el más grande en la base, es decir, formando una pila cónica. El juego consiste en trasladar los anillos a la estaca C, para obtener una pila igual a la original. La complicación es que cada vez se puede mover un solo anillo para ubicarlo en otra estaca y si en esta hay otros anillos ellos deben ser de menor diámetro, es decir, en cada etapa del juego en cada estaca debe haber una pila cónica.

    (a) Determine una recurrencia para a_n, el número mínimo de movimientos para lograr el objetivo.

    (b) Conjeture una fórmula para a_n y demuéstrela por inducción.

    La observación clave es que para mover el anillo más grande desde A hasta C, debemos primero mover los $(n-1)$ anillos restantes desde A a B y luego desde B a C.

16. S_n es un conjunto formado por n números distintos. Se trata de obtener una relación de recurrencia para a_n, la cantidad de comparaciones entre pares de números que están en S_n, para determinar el mayor de todos ellos. Es claro que $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$. En el caso general se propone el siguiente algoritmo (procedimiento). Si n es par, podemos calcular M_1, el mayor de los números en la primera mitad de S_n; después calculamos M_2, el mayor de los números en la segunda mitad de S_n; finalmente, hacemos las comparaciones entre M_1 y M_2, para así obtener el mayor elemento de S_n. Si n es impar, separamos S_n en un número aislado cualquiera y 2 mitades iguales del resto. En estas 2 mitades elegimos M_1 y M_2 como en el caso anterior y comparamos el mayor de ambos con el número aislado separado antes, para así obtener en mayor número de S_n.

    (a) Encuentre a_n para n par y para n impar.

    (b) Considere un algoritmo que recorra S_n de manera ordenada y que compare cada elemento nuevo con el mayor de los anteriores. Encuentre el número de comparaciones b_n que se realizaría con este algoritmo y compárelo con a_n

    (c) Adapte ambos algoritmos al caso de tener que obtener el mayor y el menor número de S_n y compare su eficiencia, en cuanto al número de comparaciones que realiza cada uno.

17. Una persona debe subir una escala de n peldaños, cada paso de ella puede abarcar un peldaño o dos peldaños. Se trata de establecer una relación de recurrencia para a_n la cantidad de maneras distintas de ascender la escala de n peldaños. Es fácil ver que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 3$. Note que para

calcular a_4 podemos razonar así: si el primer paso abarca un peldaño, el resto del recorrido (3 peldaños) se puede hacer de a_3 maneras; si el primer paso abarca 2 peldaños, el resto del ascenso (2 peldaños) se puede hacer de a_2 maneras, luego $a_4 = a_3 + a_2$.

(a) Exprese a_n en términos de a_{n-1} y a_{n-2} para $n \geq 3$.

(b) Demuestre por inducción que:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

18. Probar las siguientes identidades:

    (a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

    (b) $n\binom{n-1}{k} = (n-k)\binom{n}{k}$

    (c) $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$

    (d) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

19. Determinar el valor de n si $\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n+1}{3}} = \frac{5}{6}$

20. Calcular el término central de $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}x^{-2})^6$

21. En el desarrollo de $(x^2 + \frac{1}{x})^{18}$ encuentre:

    (a) El término constante.

    (b) El término central.

    (c) El valor del coeficiente de x^6.

22. Utilice el teorema del binomio para demostrar que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$$

23. Sean p y q dos reales no negativos tal que $p + q = 1$. Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$