Ejercicio pendiente Clase Auxiliar 19 de Junio del 2006. Problmea sacado de la guía 3 año 2003.

(a) Considere el subconjunto de los números complejos $H = \{a + bi \in \mathbb{C}\ tq\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

i. Pruebe que $(H, +, \cdot)$es un anillo conmutativo con unidad sin divisores del cero.

ii. Pruebe que los elementos invertibles de H con respecto a la multiplicación son:$1, -1, i, -i$.

iii. Demuestre que un número primo x se puede escribir como producto $x = z_1 z_2$, donde z_1 y z_2 son elementos no invertibles con respecto a la multiplicación en H, sí y sólo si $x = a^2 + b^2$ con $a, b \in \mathbb{N}$

Solución:

i. Vista en clases.

ii. Sea $z \in H$, es decir, $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ tq $z = a + bi$. Luego la inversa de z denotada por z^{-1} está dada por $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$,con $(a, b) \neq (0, 0)$.(Notar que la inversa existe en el conjunto $\mathbb{C}$, pero no necesariamente en H)

Nos interesa encotrar los valores de a y b de modo que $z^{-1} \in H$, que es equivalente a pedir que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ con $\alpha = \frac{a}{a^2+b^2}, \beta = \frac{-b}{a^2+b^2}$ (que corresponden al primer y segundo término de z^{-1}).

De la expresión de α se deduce que:
$\alpha \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0 \wedge a = \mp 1)$
$\beta \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow (b = 0) \vee (a = 0 \wedge b = \mp 1)$

El segundo paréntesis en el caso de α (para β es esxactamente lo mismo) se deduce al notar que si $a \neq 0$ entonces $\mid \alpha \mid = \mid \frac{a}{a^2+b^2} \mid \lneqq 1$ y $\alpha \neq 0$ (en cuyo caso $\alpha \notin \mathbb{Z}$) a menos que $b = 0 \wedge a = \mp 1$.

Pero $z^{-1} \in H \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{Z} \wedge \beta \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow (b = 0 \wedge a = \mp) \vee (a = 0 \wedge b = \mp 1) \Longleftrightarrow z^{-1} \in \{1, -1, i, -i\}$

iii. Vamos a probar las dos implicacnias por separado.

$\Longrightarrow$:

Sean z_1, z_2 dos elementos no invertibles con respecto a la multiplicación en H tales que $x = z_1 \cdot z_2$. De la definición de H $x = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$ con $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$. Luego $x = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_1 + a_2 b_2) i$,y , asumiendo que $x \in \mathbb{N}$, necesariamente $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$.

$\Longleftrightarrow a_1 = -\frac{a_2 b_2}{b_1}$ (con $b_1 \neq 0$) que al reemplazar este valor en x se obitene $x = -\frac{a_2 b_2}{b_1} \cdot a_2 - b_1 b_2 = -\frac{b_2}{b_1} \cdot (a_2^2 + b_2^2)$ pero x es primo luego necesariamente $\frac{b_2}{b_1} = -1$, de donde se obtiene lo pedido.

$\Longleftarrow$:

Sea $x = a^2 + b^2$, nos interesa encontrar $z_1, z_2 \in H$ no invertibles tales que $x = z_1 z_2$.Para eso notemos que $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, pues de otro modo x sería factorizable ya sea por a o por b. De este modo podemos escoger $z_1 = (a + bi)$ y $z_2 = (a - bi)$ de modo que estos elementos son no ivnertibles respecto a la multiplicación en H dado que ni a ni b son nulos y $z_1 z_2 = a^2 + b^2 = x$.