Auxiliar Lunes 8 de Mayo.

Demuestre que $E = \{(a_1,...,a_n) \in \{-1,1\}^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i = 0\}$ es numerable.

Veamos que E contiene solo n-uplas de tamaño par. (Puede ser intuitivo pero la idea es justificar un poco)

Supongamos que $\alpha \in E$ con $\alpha \in \{-1,1\}^{2k+1}, k \in \mathbb{N}$ (i.e. α tiene una cantidad impar de "elementos").

Luego α tiene una cierta cantidad m de 1's y n de -1's en sus elementos, o, dicho de otro modo, $\alpha_{j_1},...,\alpha_{j_m} = 1$ y $\alpha_{j_{m+1}},...,\alpha_{j_{m+n}} = -1$ para un cierto m y $n \in \mathbb{N}$ con $m+n = 2k+1$(notar que esto es verdad pues es fácil ver que no pueden ser todos los elementos positivos ni todos negativos para que la suma de cero, al ser la suma de elementos positivos necesariamente positiva, y de negativos; negativa). Es decir podemos escribir la suma $\sum\limits_{i=1}^{i=n} a_i$ como sigue

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{i=n} a_i &= \sum_{i=1}^{i=m} a_{j_i} + \sum_{i=m+1}^{i=2k+1} a_{j_i} \\
&= m - n \\
&= m - (2k+1-m) \\
&= 2m - (2k+1) \\
&= 0 \quad (\text{pues } \alpha \in E)
\end{aligned}$$

Luego, $2(m-k) = 1$ que es un contradicción pues no existen números naturales k, m que satisfagan esta propiedad.

Ahora podemos afirmar que $E = \{(a_1,...,a_{2n}) \in \{-1,1\}^{2n}, n \in \mathbb{N}, \sum\limits_{i=1}^{i=2n} a_i = 0\}$.

Vamos a probar por inducción que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $E_{2n} = \{(a_1,...,a_{2n}) \in \{-1,1\}^{2n}, \sum\limits_{i=1}^{i=2n} a_i = 0\}$ es numerable.

Caso Base:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \{(a_1,a_2) \in \{-1,1\}^2, a_1 + a_2 = 0\} \\
&= \{(1,-1),(-1,1)\}
\end{aligned}$$

que es evidentemente numerable.

Hipótesis de Inducción: Supongamos E_{2n} numerable

P.d.q E_{2n+2} es numerable.

Veamos antes que si $\alpha \in E_{2n+2} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{i=2n+2} a_i = 0$ y que además $\exists k, l \in \{1, ..., 2n+2\}$ *talque* $\alpha_k + \alpha_l = 0$ (De otro modo la suma no podría ser nula), luego podemos definir el nuevo conjunto $E_{2n+2}^{k,l}$ como sigue:

$$E_{2n+2}^{k,l} = \{(a_1, ..., a_{2n+2}) \in \{-1,1\}^{2n+2}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k, i \neq l}}^{2n+2} a_i = 0, a_k = 1, a_l = -1\}$$

de modo que
$$E_{2n+2} = \bigcup_{k=1}^{2n+2} \bigcup_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n+2} E_{2n+2}^{k,l} \quad (1)$$

En palabras, lo que quiere decir esto es que cada vez que tengamos una n-tupla con unos y menos unos de modo que todos sus elementos sumen cero, entonces necesariamente dos de ellos suman cero entre si. De este modo podríamos crear un subconjunto de E_{2n+2} llamado $E_{2n+2}^{k,l}$ en el cual para cualquier elemento α perteneciente a $E_{2n+2}^{k,l}$,se debe cumplir que $a_k = 1, a_l = -1$ y que el resto de los elementos suman cero (es fácil probar que este conjunto es efectivamente subconjunto de E_{2n+2}). Luego la unión de estos conjuntos es subconjutno de E_{2n+2}, pero a la vez, para cualquier elemento β de E_{2n+2} que escojamos, $\exists k, l \in \{1, ..., 2n+2\}$ de modo que β pertenece a $E_{2n+2}^{k,l}$.Este último razonamiento prueba que $E_{2n+2} \subseteq \bigcup_{k=1}^{2n} \bigcup_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n} E_{2n+2}^{k,l}$, que sumado a que $E_{2n+2}^{k,l} \subseteq E_{2n+2} \forall k, l \in \{1, ..., 2n+2\}$ implica que $\bigcup_{k=1}^{2n+2} \bigcup_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n+2} E_{2n+2}^{k,l} \subseteq E_{2n+2}$, se concluye que $E_{2n+2} = \bigcup_{k=1}^{2n+2} \bigcup_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2n+2} E_{2n+2}^{k,l}$.

Por hipótesis de inducción , no obstante, se puede construir un abiyección entre $E_{2n+2}^{k,l}$ y E_{2n}, dada por

$f : E_{2n+2}^{k,l} \longmapsto E_{2n}, f((a_1, ..., a_{2n+2})) = (a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1}, ..., a_{l-1}, a_{l+1}, ..., a_{2n})$.(es fácil demostrar que f es efectivamente biyectiva.....¡¡Propuesto!!).

Luego por H.I. $E_{2n+2}^{k,l}$ es numerable.

Pero la unión finita de conjuntos numerables es numerable tamibién, luego gracias a (1) , podemos concluir que E_{2n+2} es numerable.

Ahora solo falta probar que E es numerable, para eso hay que notar que

$$E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_{2n}$$

Y gracias a que la unión numerable de conjuntos numerables es también numerable, entonces E es numerable.

Nota: no es tribial afirmar que $E = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} E_{2n}$, pues la misma definición de $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} E_{2n}$ no lo es. De hecho una definición psible es $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} E_{2n} \equiv \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \in E_{2n}\}$,con la cual efectivamente se puede demostrar que $E = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} E_{2n}$ (es un buen ejercicio demostrarlo).