

Guia No Resuelta de Cardinalidad

Profesor: María Leonor Varas

Auxiliares: Sebastian Astroza & Diego Morán

P1 i) Se define el siguiente conjunto

$$P_n = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$$

Pruebe que P_n es numerable.

ii) Sea P el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros

$$P = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$$

Demuestre que P es numerable. HINT: Puede usar P12.

P2 Sea $L_{\mathbb{Z}} = \{l : l \text{ es una recta en } \mathbb{R}^2 \text{ que pasa por 2 puntos de coordenadas enteras}\}$.
Muestre que $L_{\mathbb{Z}}$ es numerable.

P3 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Pruebe que el intervalo $[a, b]$ tiene el mismo cardinal que \mathbb{R} .

P4 Muestre que si A, B son conjuntos entonces

$$|A \times B| = |B \times A|$$

P5 Sea A un conjunto cualquiera. Se define $F_A = \{f : A \rightarrow \{0, 1\} / f \text{ es función}\}$.
Demuestre que:

$$|F_A| = |P(A)|$$

P6 Sean B un conjunto numerable y $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Demuestre que:

a) $f(B)$ es un conjunto finito o numerable

b) Si f es inyectiva, entonces $|f(B)| = |\mathbb{N}|$

P7 Demuestre que no hay funciones biyectivas entre \mathbb{N} y un conjunto finito cualquiera.

- P8 i) Sean A_1, A_2 dos conjuntos numerables. Pruebe que $A_1 \times A_2$ también lo es. Si A_1, A_2, \dots, A_n son conjuntos numerables, ¿Qué puede decir sobre $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$?
- ii) Muestre que $A = \{x \in \mathbb{R} : x = a + b\sqrt{-1}, \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$ es numerable.
- iii) Sea B un conjunto no vacío. Pruebe que si $B \times \mathbb{N}$ es infinito no numerable, entonces B es infinito no numerable.

P9 Dado $E \subseteq \mathbb{R}$ definimos

$$-E = \{-x : x \in E\}$$

Pruebe que si E es numerable, entonces $-E$ también lo es.

P10 Sean A, B, C conjuntos tales que $|A| = |B|$ y $A \cap C = B \cap C = \phi$. Demuestre que

$$|A \cup C| = |B \cup C|$$

P11 Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección de conjuntos numerables (ie, $\forall n \in \mathbb{N} A_n$ es un conjunto numerable). Se definen:

- $B_0 = A_0$
- $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$

Pruebe que:

- i) Si $i \neq j$, entonces $B_i \cap B_j = \phi$
- ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

P12 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea A_n un conjunto numerable. Muestre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es un conjunto numerable. Hint: Puede usar P11.

P13 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, definimos:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Sean A, B conjuntos numerables. Pruebe que:

- i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad A + \{x\}$ es un conjunto numerable.
- ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad A + \{x, y\}$ es un conjunto numerable.
- iii) $A + B$ es un conjunto numerable. Hint: puede usar P12.

P14 Se define, para $p, q \in \mathbb{Q}$, la siguiente relación R

$$pRq \iff p - q \in \mathbb{Z}$$

- i) Pruebe que R es relación de equivalencia.
- ii) Demuestre que $\forall q \in \mathbb{Q}$, $[q]_R$ es un conjunto numerable.

P15 Demuestre que:

- i) Demuestre que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(n, m) = 2^n 3^m$$

es inyectiva.

- ii) Usando la parte anterior verifique que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

The End