

MA11A-3

Profesor: Eduardo Moreno

Profesor Auxiliar: Fernando Feres T.

Problema 1

A partir de los siguientes vectores de \mathbb{R}^4 complete una base de \mathbb{R}^4 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Definamos: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Para completar una base necesi-

tamos saber cuales son los vectores que no podremos formar como combinación de los vectores anteriores, para esto formaremos una matriz a partir de \vec{v}_1^T y

\vec{v}_2^T $A = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \end{bmatrix}$ y la escalonaremos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{si } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ y } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ Con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0.$$

Estos vectores serán linealmente independientes de \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .

Problema 2

Extraiga una base del conjunto generado por los siguientes vectores de \mathbb{R}^4

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución:

De manera similar al problema anterior definamos $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ahora escribamos la matriz extendida $\begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vec{v}_2^T \\ \vec{v}_3^T \\ \vec{v}_4^T \\ \vec{v}_5^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 7 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 7 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Hemos llegado que a partir de \vec{v}_3, \vec{v}_5 y alguno de los otros tres vectores

(sólo uno) podemos formar una base, la base queda por $B = \{\vec{v}_3, \vec{v}_5, \vec{v}_1\}$ y el espacio generado tiene dimensión 3

Problema 3

Definamos P_4 al conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 4, y sean los siguientes conjuntos:

- $W_1 = \{p \in P_4 : p(1) + 2p(-1) = 0\}$
- $W_2 = \{p \in P_4 : p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}\}$

1. Pruebe que P_4 con la suma y ponderación por escalar usual de funciones en \mathbb{R} es un espacio vectorial.
2. Pruebe que W_1 es subespacios vectorial de P_4
3. Pruebe que W_2 es subespacios vectorial de P_4 .

4. Encuentre una base para W_1
5. Encuentre una base para W_2 .

Solución:

1. Propuesto.
2. Para esto necesitamos probar que la suma y la ponderación por escalar es cerrada y podemos demostrarlos de manera compacta.
Sean $p_1, p_2 \in W_1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ Pdq: $p_1 + \alpha p_2 \in W_1$, es decir necesitamos probar que

$$(p_1 + \alpha p_2)(1) + 2(p_1 + \alpha p_2)(-1) = 0.$$
Calculemoslo. $(p_1 + p_2)(1) + 2(p_1 + p_2)(-1) =$
 $p_1(1) + 2p_1(-1) + \alpha p_2(1) + 2\alpha p_2(-1) =$
 $0 + \alpha(p_2(1) + 2p_2(-1)) = \alpha 0 = 0$
La primera igualdad es agrupar terminos la segunda se debe a que $p_1 \in W_1$ y la ultima se debe a que $p_2 \in W_1$ y P_4 es espacio vectorial.
3. Para W_2 , sean $p_1, p_2 \in W_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Pdq: $p_1 + \lambda p_2 \in W_2$ Sabemos que $p_1(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4$ y que $p_2(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4$ con $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
 $(p_1 + \lambda p_2)(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + ax^4 + \lambda(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \beta x^3 + \alpha x^4)$
 $= (a + \lambda\alpha) + (b + \lambda\beta)x + (c + \lambda\gamma)x^2 + (b + \lambda\beta)x^3 + (a + \lambda\alpha)x^4.$
Luego tomando $a' = (a + \lambda\alpha); b' = (b + \lambda\beta); c' = (c + \lambda\gamma)$
tenemos que $(p_1 + \lambda p_2)(x) = a' + b'x + c'x^2 + b'x^3 + a'x^4$, con $a', b', c' \in \mathbb{R}$
4. Busquemos una base para W_1 , sea $p \in W_1$, esto quiere decir que $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, con $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, ahora si $p \in W_1 \iff p(1) + 2p(-1) = 0 \iff a + b + c + d + e + 2(a - b + c - d + e) = 0 \iff 3a - b + 3c - d + 3e = 0 \iff a = \frac{b}{3} - c + \frac{d}{3} - e$, a partir de esto que tenemos, que teniendo los coeficientes $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ podemos determinar a es decir $p \in W_1 \iff p(x) = (\frac{b}{3} - c + \frac{d}{3} - e) + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, con $b, c, d, e \in \mathbb{R} \iff b(\frac{1}{3} + x) + c(x^2 - 1) + d(\frac{1}{3} + x^3) + e(x^4 - 1)$, evidentemente $B = \{(\frac{1}{3} + x), (x^2 - 1), (\frac{1}{3} + x^3), (x^4 - 1)\}$ genera W_1 , pues esto viene directamente del hecho de tomarnos un elemento cualquiera de W_1 , y ver como estaba formado. Ahora queda como propuesto probar la independencia lineal, pero es sencillo.
5. Ahora busquemos una base para W_2 . Sea $p \in W_2 \iff p(x) = a + bx + cx^2 + bx^3 + cx^4$, con $a, b, c \in \mathbb{R} \iff a(1 + x^4) + b(x + x^3) + cx^2$, tenemos $B = \{(1 + x^4), (x + x^3), x^2\}$ es un conjunto generador de W_2 debido a que es equivalente a la definición de que un polinomio este en W_2 . Queda como propuesto probar que B es linealmente independiente.

Problema 4

Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se define $Ker(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = 0\}$, Pruebe que $Ker(A)$ es un s.e.v. de \mathbb{R}^n

Solución:

Sean $\vec{x}, \vec{y} \in Ker(A)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, Pdq; $(\vec{x} + \lambda\vec{y}) \in Ker(A)$
 $(\vec{x} + \lambda\vec{y}) \in Ker(A) \iff A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = 0$
 Calculemos $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = A\vec{x} + A(\lambda\vec{y})$, donde la igualdad se tiene pues el producto de matrices distribuye, luego $A\vec{x} = 0$, pues $\vec{x} \in Ker(A)$, ahora $A(\lambda\vec{y}) = \lambda(A\vec{y})$ por propiedades de matrices y ponderación por escalar, luego tenemos que $\lambda(A\vec{y}) = 0$, pues $\vec{y} \in Ker(A)$ y \mathbb{R}^n es espacio vectorial.

Problema 5

Pruebe que que el conjunto E de las funciones reales del tipo

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = A \text{Sen}(x + \alpha), \text{ con } A, \alpha \in \mathbb{R};$$

es un subespacio generado por las funciones seno y coseno

Solución:

Para partir el problema debemos saber quien es conjunto de las funciones generadas por seno y coseno, claramente ese debe tener como base $B = \{\text{Sen}(x), \text{Cos}(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, llamemos F al conjunto generado por B , es decir $g \in F \iff g(x) = \beta \text{Sen}(x) + \gamma \text{Cos}(x), \forall x \in \mathbb{R}, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ahora que ya sabemos esto veamos la otra información que tenemos. Tomemos una función en el conjunto que nos definen y saquemosle el máximo de provecho.

Sea $f \in E$, luego $f(x) = A \text{Sen}(x + \alpha)$ $A, \alpha \in \mathbb{R}$

$f(x) = A \text{Sen}(x) \text{Cos}(\alpha) + A \text{Cos}(x) \text{Sen}(\alpha)$, Claramente tomando

$\beta = A \text{Cos}(\alpha)$ y $\gamma = A \text{Sen}(\alpha)$, es decir cualquiera elemento de E se puede escribir como combinación lineal de seno y coseno es decir $E \subseteq F$, ahora probemos que si tomamos un elemento de F este elemento vive también en E .

Sea $g \in E$, luego $g(x) = \beta \text{Sen}(x) + \gamma \text{Cos}(x)$ con $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

notemos que $g(x) = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \left(\frac{\beta \text{Sen}(x)}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} + \frac{\gamma \text{Cos}(x)}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \right)$,

observemos que $-1 \leq \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \leq 1$ y que $-1 \leq \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \leq 1$ y que además

$$\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \right)^2 = 1, \text{ a partir de esto podemos concluir que}$$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \text{Cos}(\alpha) = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$ y que $\text{Sen}(\alpha) = \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$, por lo tanto

$$g(x) = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} \left(\frac{\beta \text{Sen}(x)}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} + \frac{\gamma \text{Cos}(x)}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} \right) = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} (\text{Sen}(x) \text{Cos}(\alpha) + \text{Cos}(x) \text{Sen}(\alpha)),$$

finalmente tomando el α que encontramos y $A = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$, $g(x) \in E$.

Problema 6

Sea $\{a_1, \dots, a_n\}$ una base de un espacio vectorial E de dimensión n sobre \mathbb{R} .

Dado $p \leq n$ se definen los vectores $x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} a_j$, $i = 1, \dots, p$ donde los α_{ij} satisfacen:

- $j < i \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$
- $\alpha_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$

Muestre que el conjunto de vectores x_i es *l.i.*

Solución:

Entendamos un poco mejor quienes son los x_i 's

$$x_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1n}a_n$$

$$x_2 = \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{2n}a_n = \alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{2n}a_n, \text{ pues } \alpha_{21} = 0$$

$$x_3 = \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3 + \dots + \alpha_{3n}a_n = \alpha_{33}a_3 + \dots + \alpha_{3n}a_n, \\ \text{pues } \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0$$

.

.

.

$$x_p = \alpha_{p1}a_1 + \alpha_{p2}a_2 + \alpha_{p3}a_3 + \dots + \alpha_{pp}a_p + \dots + \alpha_{pn}a_n = \alpha_{pp}a_p + \dots + \alpha_{pn}a_n, \\ \text{pues } \alpha_{p1} = \dots = \alpha_{pp-1} = 0$$

Ahora probemos que los x_i 's son *l.i.*, es decir tomemos $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$, tales que $\beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p = 0$, demostremos que $\beta_1 = \dots = \beta_p = 0$, es decir

que $\sum_{k=1}^p \beta_k \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} a_j = 0$, pero esto no se entiende y en general no nos sirve

mucho, entonces abramos la suma.

$$\beta_1(\alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1n}a_n) + \beta_2(\alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{2n}a_n) + \\ \beta_3(\alpha_{33}a_3 + \dots + \alpha_{3n}a_n) + \dots + \beta_p(\alpha_{pp}a_p + \dots + \alpha_{pn}a_n)$$

Ahora que tenemos más claro la forma de nuestra combinación lineal tratemos de usar el hecho que $\{a_1, \dots, a_n\}$ es base para ello el termino de arriba lo ordenaremos.

$$(\beta_1\alpha_{11})a_1 + (\beta_1\alpha_{12} + \beta_2\alpha_{22})a_2 \\ + (\beta_1\alpha_{13} + \beta_2\alpha_{23} + \beta_3\alpha_{33})a_3 + \dots + (\beta_1\alpha_{1p} + \dots + \beta_p\alpha_{pp})a_p \\ + (\beta_1\alpha_{1p+1} + \dots + \beta_p\alpha_{np+1})a_{p+1} + \dots + (\beta_1\alpha_{1n} + \dots + \beta_p\alpha_{pn})a_n = 0$$

Luego como $\{a_1, \dots, a_n\}$ y tenemos una combinación lineal de ellos que vale 0 no queda más que los coeficientes sean 0, es decir:

$$(\beta_1\alpha_{11}) = (\beta_1\alpha_{12} + \beta_2\alpha_{22}) =$$

$$(\beta_1\alpha_{13} + \beta_2\alpha_{23} + \beta_3\alpha_{33}) = \dots = (\beta_1\alpha_{1p} + \dots + \beta_p\alpha_{pp}) =$$

$$(\beta_1\alpha_{1p+1} + \dots + \beta_p\alpha_{np+1}) = \dots = (\beta_1\alpha_{1n} + \dots + \beta_p\alpha_{pn})a_n = 0$$

Notemos que como $\alpha_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$ entonces $\beta_1 = 0$, con esto tenemos que $\beta_2\alpha_{22} = 0$, pero por la misma condición anterior $\beta_2 = 0$, luego es evidente que $\forall i \leq p, \beta_i = 0 \Rightarrow \beta_{i+1} = 0$, por lo tanto por inducción $\forall i = 1, \dots, p, \beta_i = 0$.