Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell
Auxs: Cristián Figueroa, David Gómez

22 de Agosto, 2006

P1. Sean p, q puntos distintos en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x - p|| = ||x - q||\}$$

es un plano. Encuentre un punto de $\mathcal{A}$ y un vector normal a él.

P2. En $\mathbb{R}^3$ considere las rectas

$$L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad L_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

1. Demuestre que L_1 y L_2 se intersectan y encuentre su intersección.
2. Encuentre el sistema de ecuaciones cartesianas que representan a la recta L que pasa por $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que es perpendicular al plano que contiene a L_1 y L_2.
3. Determine las ecuaciones de los planos que son paralelos al plano que contiene a L_1 y L_2 y que se encuentran a distancia 1 del punto en que L_1 y L_2 se intersectan.

P3.

1. Considere la matriz por bloques

$$M = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ C & B \end{bmatrix}$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ son invertibles, $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Demuestre que M es invertible, y calcule su inversa.

2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz no invertible, y sean $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^n$ sus columnas. Demuestre que existen valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_n c_n = 0$$

P4.

1. Encuentre la proyección del punto $p = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ sobre el plano πdado por la ecuación cartesiana $y + z = 0$.

2. Considere la recta $L : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Muestre que el conjunto de proyecciones de los puntos de L sobre π forman una recta.