

Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: David Gómez, Francisco Silva

4 de Julio, 2006

P1. Sea $n \geq 1$, y para cada $k \in \{0, \dots, n-1\}$ considere la raíz n -ésima de la unidad $\rho_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$. Definimos el polinomio

$$q(x) = \rho_0 + \rho_1 x + \dots + \rho_{n-1} x^{n-1}$$

Demuestre que las raíces de q son $\rho_0, \dots, \rho_{n-2}$. ¿Son éstas todas sus raíces?

P2. Factorice en producto de polinomios de grado 1 en $\mathbb{C}[x]$ el polinomio $1 + ix - x^2 - ix^3$.

P3. Encuentre todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación

$$\left(\frac{z^4 + 3}{z^4}\right)^2 + \left(\frac{z^4 + 3}{z^4}\right) - 2 = 0$$

P4. Sabiendo que el polinomio

$$P(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz - 3i + 1 \in \mathbb{C}[z]$$

tiene una raíz real, determine alguna de las raíces de P . HINT: Si $a \in \mathbb{R}$ es una raíz de P , estudie las partes real e imaginaria de $P(a)$.

P5. Sea $\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ con la suma y producto usual de \mathbb{R} . Asuma que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

1. Se define $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ por $f(a + b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$. Pruebe que f es un isomorfismo de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.
2. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un polinomio con coeficientes en \mathbb{Q} . Pruebe que si $\bar{x} \in \mathbb{K}$ entonces $p(f(\bar{x})) = f(p(\bar{x}))$.
3. Pruebe que si $a + b\sqrt{5} \in \mathbb{K}$ es una raíz de p , entonces $a - b\sqrt{5}$ también es raíz de p .
4. Suponga que el polinomio p tiene grado 3 y que $2 + \sqrt{5}$ es una raíz de p . Pruebe que p tiene una raíz en \mathbb{Q} . HINT: Suponga que no es cierto, y encuentre una expresión para p donde se verifique que sus coeficientes no pertenecen al conjunto apropiado.