

Auxiliar - MA11A

30 de Junio de 2006

PROFESOR: PABLO DARTNELL

AUXILIARES: DAVID GÓMEZ, FRANCISCO SILVA

P1.- a) Expresé en forma $a + bi$ las raíces cuartas de $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

b) Sea $A = \{z \in \mathbb{Z}/|z| = c, c \in \mathbb{R}\}$, donde c es fijo. Sean $f, g : A \rightarrow A$ definidas por $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = iz$. Calcule:

i) $(g \circ f)(z) + (f \circ g)(z)$

ii) $|(g \circ f)(z)| + |(f \circ g)(z)|$.

c) Sea $m \in \mathbb{N}$ y w_0, \dots, w_{n-1} las raíces n -ésimas de la unidad. Verifique que $\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} w_l^m = 1$ si n divide a m y 0 si no.

d) Sean $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Encontrar el menor natural n tal que $z^n = w^n = 1$.

P2.- Considere el grupo abeliano (G, \bullet) . Para $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 2$ defina $G^k = \{a^k/a \in G\}$.

a) Pruebe que (G^k, \bullet) es un subgrupo de (G, \bullet) .

b) En $((\mathbb{Z}_{53}^*)^2, \bullet_{53})$ determine el inverso de $[9]^2$.

P3.- Se consideran $2n$ números complejos a_p variando el índice desde $p = -n$ a $p = n - 1$. Se definen $2n$ números complejos b_q variando el índice desde $q = -n$ a $q = n - 1$, mediante las relaciones:

$$b_q = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{p=-n}^{n-1} a_p e^{\frac{ipq\pi}{n}}$$

a) Probar que :

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{q=-n}^{n-1} b_q e^{\frac{-ipq\pi}{n}}$$

b) Calcular b_q si $a_p = e^{i\alpha p}$, donde α es un real dado.

c) Calcular los b_q cuando $a_p = \cos(\alpha p) = \frac{1}{2}(e^{i\alpha p} + e^{-i\alpha p})$.

d) Pruebe que

$$\cot(x) = \frac{1}{2n} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{q=-n}^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{q\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{x}{n}\right)}$$