

Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: David Gómez, Francisco Silva

27 de Junio, 2006

P1 (6 semana pasada). Demuestre que la suma de las raíces n -ésimas de la unidad es 0, y que el producto vale $(-1)^{n-1}$.

P2. Utilizando el Teorema de De Moivre, demuestre que

$$\cos 5\theta = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$$

P3 (6 semana antepasada). Los complejos z_1, z_2, \dots, z_k son tales que $|z_i| = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Demuestre que si $\sum_{i=1}^k z_i = a$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{i=1}^k \frac{1}{z_i} = a$.

P4 (5 semana antepasada, algo modificado). Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo finito sin divisores de cero.

1. Pruebe que existe $n \geq 1$ tal que $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}} = 0$.

2. Pruebe que si $a, b \geq 1$, entonces

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a \cdot b \text{ veces}} = 0 \implies \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_a = 0 \vee \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_b = 0$$

3. Se llama *característica de A* al menor $n \geq 1$ tal que se cumple la propiedad de la parte 1. Pruebe que la característica de A es un número primo.

4. Muestre que la característica de A divide a $|A|$. HINT: Vea $(A, +)$ como un grupo, y use el teorema de Lagrange.
 5. Sea p la característica de A . Muestre que si $n \geq 1$ es tal que se cumple la propiedad de la parte 1, entonces $p \mid n$. HINT: Justifique por qué $n \geq p$, y observe que en tal caso se puede escribir $n = p \cdot q + r$, con q, r naturales y $0 \leq r < p$ (esto se llama Teorema de la División). Note que si $p \nmid n$, entonces $r \neq 0$.
 6. Sean $(G, +, \cdot)$ y $(H, *, \Delta)$ dos cuerpos finitos, tales que existe un morfismo $f : G \rightarrow H$ con $f(1_G) = 1_H$. Muestre que la característica de G divide a la de H , y concluya que son iguales.
- P5.** Sean $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ y $w = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$. Encuentre el menor entero $n \geq 1$ tal que $z^n = w^n = 1$.