

Auxiliar - MA11A

23 de Junio de 2006

PROFESOR: PABLO DARTNELL

AUXILIARES: DAVID GÓMEZ, FRANCISCO SILVA

P1.- Sea $f : (\mathbb{C}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$ un homomorfismo que satisface que $f(z) = z$ si $\text{Im}(z) = 0$. Pruebe que necesariamente $f(z) = z \ \forall z \in \mathbb{C}$ o $f(z) = \bar{z} \ \forall z \in \mathbb{C}$

P2.-

a) Calcule las raíces de $z^2 = -i$ y expreselas de la forma $a + ib$.

b) Si $z + \frac{1}{z} = 2 \cos(\alpha)$, calcule los posibles z y pruebe que $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\alpha)$.

c) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1-i)^n + (1+i)^n \in \mathbb{R}$.

P3.- Considere $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ con la operación \oplus definida por $(a, b) \oplus (\bar{a}, \bar{b}) = (a +_2 \bar{a}, b +_3 \bar{b})$.

i) Pruebe que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ es un grupo.

ii) Construya un isomorfismo $f : (\mathbb{Z}_6, +_6) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ tal que $f([1]_6) = ([1]_2, [1]_3)$. Concluya que es único.

P4.-

a) Sean $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Pruebe que

$$\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\bar{z}^n}$$

es un número real.

b) Exprese en forma $a + bi$ las raíces cuartas de $z_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

c) Sean z_1, z_2 , complejos tales que $|z_1| = |z_2| = 1$. Pruebe que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ssi $z_1 = z_2$. (**Indicación:** Pruebe que si $w \in \mathbb{C}$, entonces $|w| = 1$ y $\text{Re}(w) = 1$ ssi $w = 1$)

P5.- Sea $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ y sean $f, g: U \longrightarrow U$ tales que $f(z) = \bar{z}$ y $g(z) = iz$.

Para cualquier función $h : U \longrightarrow U$ se define $h^0 = \text{id}_U$ y $h^n = h \circ h \circ \dots \circ h$, donde la composición se hace n veces. Si además h es biyectiva se define $h^n = (h^{-1})^{|n|}$ si $n = -1, -2, -3, \dots$, y se tiene (no lo pruebe) que para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ $h^n \circ h^m = h^{m+n}$, y que $(\{h^p / p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es un grupo.

i) Verificar que f y g son biyectivas y que $g \circ f \neq f \circ g$. Probar además que $\forall p \in \mathbb{Z} \ g^p(z) = i^p z$, que si p es par, entonces $f^p = \text{id}_U$ y si p es impar $f^p = f$.

ii) Demuestre que $(\{f^p : U \longrightarrow U / p \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ es isomorfo a $(\{-1, 1\}, \cdot)$ donde \cdot es la multiplicación usual en \mathbb{R} .

iii) Probar que para todo $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $(f^m \circ g^n) \circ (f^p \circ g^q) = f^s \circ g^t$.

iv) Sea $G = \{f^m \circ g^m : U \longrightarrow U / m, n \in \mathbb{Z}\}$. Probar que (G, \circ) es un subgrupo no abeliano del grupo (H, \circ) donde $H = \{h : U \longrightarrow U / h \text{ es biyectiva}\}$