

# Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: Cristián Figueroa, David Gómez

14 de Noviembre, 2006

**P1.** Determine para qué valores de  $a \in \mathbb{R}$ , la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

es definida positiva.

**P2.** Sean  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matriz simétrica, e  $\mathbf{I}$  la matriz identidad.

1. Pruebe que  $c \in \mathbb{R}^n$  es vector propio de  $A$  si y sólo si es vector propio de  $\mathbf{I} - A$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  es el valor propio de  $A$  asociado a  $v$ , ¿cuál es el valor propio de  $\mathbf{I} - A$  asociado a  $v$ ?
2. Pruebe que la matriz  $\mathbf{I} - A$  es definida positiva si y sólo si todos los valores propios de  $A$  son estrictamente menores que 1.

**P3.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  una matriz cualquiera.

1. Demuestre que  $A \cdot A^T$  es simétrica y semidefinida positiva.
2. Pruebe que  $A$  es invertible si y sólo si  $A \cdot A^T$  es definida positiva.
3. Se define el radio espectral de  $A$ , denotado  $\rho(A)$ , como

$$\rho(A) = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ es valor propio de } A \cdot A^T\}$$

Demuestre que  $A = 0 \iff \rho(A) = 0$ .

**Otros ejercicios:**

1. Sea  $A$  simétrica y definida positiva. Pruebe que todos los elementos de su diagonal son estrictamente positivos.
2. Sea  $A$  simétrica y definida positiva. Pruebe que  $A$  es invertible.
3. Sea  $A$  simétrica. Demuestre que si  $A$  es definida positiva entonces  $A^{-1}$  también.
4. Sea  $A$  invertible, simétrica y semidefinida positiva. Demuestre que  $A$  es entonces definida positiva.