

Ejercicios Clase Auxiliar

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: Cristián Figueroa, David Gómez

7 de Noviembre, 2006

P1. Sea $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, con todos sus valores propios mayores o iguales a cero.

1. Demuestre que, dado $x \in \mathbb{R}^n$: $x^T M x \geq 0$.

Sea $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una base ortonormal. Suponga que para todo $i = 1, \dots, m$ se tiene que $x_i^T M x_i \leq 1$. Demostraremos que todos los valores propios de M están acotados superiormente por n . Para ello

2. Desarrolle el producto $(x_i - x_j)^T M (x_i - x_j)$ y concluya que $x_i^T M x_j \leq 1$ para todo i, j .
3. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Escribiendo x como combinación lineal de la base dada, demuestre que $x^T M x \leq n \|x\|^2$. HINT: Recuerde la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$.
4. Tome $v \in \mathbb{R}^n$ un vector propio de M , asociado al valor propio λ . Usando la parte anterior, demuestre que $\lambda \leq n$.

P2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica con una base ortonormal de \mathbb{R}^n de vectores propios v_1, \dots, v_n asociados a los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente, donde $1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$.

1. Sea $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\alpha_i = \langle u, v_i \rangle$, que $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ y $Au = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i v_i$.
2. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ y $w = Au - \langle u, v_1 \rangle v_1$. Pruebe que $w \perp v_1$.

3. Sea $u \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $u \perp v_1$, entonces $Au \perp v_1$ y $\|Au\|^2 \leq \lambda_2^2 \|u\|^2$.
4. Para w como en la parte (2), pruebe que $\|A^m w\| \leq \lambda_2^m \|w\|$ para todo $m \geq 1$. Concluya que si $u \in \mathbb{R}^n$ y $m \geq 0$, entonces

$$\|A^{m+1}u - \langle u, v_1 \rangle v_1\| \leq \lambda_2^m \|Au - \langle u, v_1 \rangle v_1\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$