

Ejercicios Clase Auxiliar (extra)

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: Cristián Figueroa, David Gómez

30 de Octubre, 2006

P1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con A invertible. Demuestre que los polinomios característicos de $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son iguales.

P2. Para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, suponga que $A^2 = A$. Demuestre que los valores propios de A valen cero o uno.

P3. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que satisface: $\det A = 1$ y $A^{-1} = A^T$. Pruebe que

1. Si A es triangular, entonces es diagonal.
2. Los valores propios de A (reales o complejos) tienen módulo 1.
3. Los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales entre sí.
4. Existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con $\det U = 1$ y $U^{-1} = U^T$ tal que $U^T A U$ es diagonal.

P4. Buscamos una fórmula explícita para los números de Fibonacci

$$\begin{aligned}f_1 &= 1 \\f_2 &= 1 \\f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \quad (\forall n \geq 1)\end{aligned}$$

Para ello, reescribimos esto del modo siguiente: sea $x_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ para todo $n \geq 1$. Es fácil verificar que se cumple la recurrencia

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x_n$$

con lo que, si definimos $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, nos queda para todo $n \geq 1$

$$x_n = A^{n-1} \cdot x_1 = A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observe que A es simétrica. Diagonalice A , y utilizando la descomposición $A = PDP^T$ calcule x_n para todo $n \geq 1$.