

Resolución Ejercicios Pendientes

Prof: Pablo Dartnell

Auxs: Cristián Figueroa, David Gómez

3 de Octubre, 2006

P1. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} y sea $L : V \rightarrow V$ una función lineal. Suponga que existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 \in V$ tales que $L^{n-1}(x_0) \neq 0$ y $L^n(x_0) = 0$ (los exponentes denotan composición). Demuestre que el conjunto $\{x_0, L(x_0), \dots, L^{n-1}(x_0)\}$ es linealmente independiente.

Demostración: Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ escalares en \mathbb{K} tales que

$$\alpha_1 x_0 + \alpha_2 L(x_0) + \dots + \alpha_n L^{n-1}(x_0) = 0 \quad (1)$$

Notemos que como $L^n(x_0) = 0$, entonces para todo $N \geq n$ $L^N(x_0) = 0$ (demostrarlo por inducción). Llamaremos a esto (*).

Partiendo de la igualdad (1), aplicando a ambos lados la función L $(n-1)$ veces obtenemos que

$$\alpha_1 L^{n-1}(x_0) + \alpha_2 L^n(x_0) + \dots + \alpha_n L^{2n-2}(x_0) = 0$$

Gracias a (*), tenemos que todos los sumandos de esta expresión, salvo el primero, valen 0. Por lo tanto $\alpha_1 L^{n-1}(x_0) = 0$. Como $L^{n-1}(x_0) \neq 0$, obtenemos que $\alpha_1 = 0$. Reemplazando esto en (1), nos queda que

$$\alpha_2 L(x_0) + \dots + \alpha_n L^{n-1}(x_0) = 0 \quad (2)$$

Seguimos ahora aplicando en esta nueva igualdad la función L , pero ahora $(n-2)$ veces. De este modo, obtendremos que $\alpha_2 = 0$. Procediendo análogamente, llegaremos a que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, con lo que demostramos que el conjunto es l.i.

P2. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n , y $T : V \rightarrow V$ una función lineal. Demuestre que

1. $\mathbb{Ker}(T) \oplus \mathbb{Im}(T) = V \implies$ la restricción de T a $\mathbb{Im}(T)$ es un isomorfismo
2. $\mathbb{Ker}(T) \oplus \mathbb{Im}(T) = V \iff \mathbb{Ker}(T \circ T) = \mathbb{Ker}(T)$

Demostración:

1. Llamemos T' a la restricción de T a $\mathbb{Im}(T)$. Es decir,

$$\begin{array}{ccc} T' : \mathbb{Im}(T) & \rightarrow & V \\ x & \rightarrow & T'(x) = T(x) \end{array}$$

Sea $y \in \mathbb{Im}(T')$. Entonces existe $x \in \mathbb{Im}(T)$ tal que $y = T'(x)$. Luego, también, $y = T(x)$, y por lo tanto $y \in \mathbb{Im}(T)$. De este modo

$$\mathbb{Im}(T') \subseteq \mathbb{Im}(T)$$

o sea el recorrido de T' está contenido en $\mathbb{Im}(T)$. Podemos así escribir que T' va de $\mathbb{Im}(T)$ en $\mathbb{Im}(T)$, el cual es un espacio vectorial de dimensión finita pues es subespacio de V .

Es claro que T' es lineal, luego para demostrar que es isomorfismo, sólo resta verificar que T' es biyectiva. Como su espacio de partida es de dimensión finita, por el Teorema de Núcleo-Imagen nos basta mostrar que es inyectiva, para lo cual basta verificar que $\mathbb{Ker}(T') = \{0\}$.

Sea $x \in \mathbb{Ker}(T')$. Entonces $x \in \mathbb{Im}(T)$ (pues $\mathbb{Im}(T)$ es el dominio de T') y $T'(x) = 0$. Pero como $T'(x) = T(x)$, obtenemos que $x \in \mathbb{Ker}(T)$. Luego $x \in \mathbb{Im}(T) \cap \mathbb{Ker}(T)$. Como estos dos espacios están en suma directa, tenemos que $x = 0$, con lo cual concluimos lo que queríamos.

2. Implicancia hacia la derecha:

- Si $T(x) = 0$, entonces es claro que $T \circ T(x) = T(T(x)) = 0$. Por lo tanto, $\mathbb{Ker}(T) \subseteq \mathbb{Ker}(T \circ T)$.
- Para la otra inclusión. Sea $x \in \mathbb{Ker}(T \circ T)$. Entonces $T(T(x)) = 0$. Gracias a la hipótesis de suma directa, tenemos que existe un único par $y \in \mathbb{Ker}(T)$, $z \in \mathbb{Im}(T)$ tal que $x = y + z$. Así,

$$0 = T(T(x)) = T(T(y)) + T(T(z)) = T(0) + T(T(z)) = T(T(z))$$

con lo que $T(z) \in \mathbb{Ker}(T)$. Por lo tanto, $T(z) \in \mathbb{Ker}(T) \cap \mathbb{Im}(T)$, y entonces $T(z) = 0$ por la hipótesis. O sea $z \in \mathbb{Ker}(T)$, y luego

$z \in \mathbb{Ker}(T) \cap \mathbb{Im}(T)$. Finalmente, a partir de esto obtenemos que $z = 0$.

Concluimos que $x = y$, y como $y \in \mathbb{Ker}(T)$, tenemos que $x \in \mathbb{Ker}(T)$.

Implicancia hacia la izquierda:

- Sea $x \in \mathbb{Im}(T) \cap \mathbb{Ker}(T)$. Como $x \in \mathbb{Im}(T)$, tenemos que existe w tal que $x = T(w)$. Como $x \in \mathbb{Ker}(T)$, $T(x) = 0$ y así $T(T(w)) = 0$. Entonces $w \in \mathbb{Ker}(T \circ T)$, y por la igualdad de la hipótesis tenemos que $w \in \mathbb{Ker}(T)$, o sea $T(w) = 0$. Se obtiene así que $x = 0$.
- Por el Teorema de Núcleo-Imagen, tenemos que

$$\dim V = \dim \mathbb{Ker}(T) + \dim \mathbb{Im}(T)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{Ker}(T) + \mathbb{Im}(T)) &= \dim \mathbb{Ker}(T) + \dim \mathbb{Im}(T) - \dim(\mathbb{Ker}(T) \cap \mathbb{Im}(T)) \\ &= \dim V - 0 \\ &= \dim V \end{aligned}$$

Como $\mathbb{Ker}(T) + \mathbb{Im}(T)$ es subespacio de V y tiene la misma dimensión de V , concluimos que $\mathbb{Ker}(T) + \mathbb{Im}(T) = V$, con lo que terminamos la demostración.