Universidad de Chile **Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas**

Trabajo Dirigido para el control 5

Viernes 6 de Octubre, 2006

Profesor: Jorge Amaya
Auxiliares: Bolivar Díaz, Francisco Silva

P1. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
a)Encuentre una base ortonormal de W y una base ortonormal de $W^{\perp}$
b)Encuentre la proyección de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sobre $W^{\perp}$.

P2. Sea V el s.e.v de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,2,1,0)$, $v_3 = (1,3,1,0)$, $v_4 = (1,1,3,2)$, $v_5 = (0,1,2,1)$, $(1,-1,2,2)$. Sea U el s.e.v de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $u_1 = (1,0,1,1)$ y $u_2 = (-1,1,1,0)$.
a)Encontrar base y dimensión de V.
b)Probar que U es s.e.v de V.
c)Encuentre $\widehat{U}$ s.e.v de V tal que $U \oplus \widehat{U} = V$

P3. Sea $P_4(\mathbb{R})$ el e.v sobre $\mathbb{R}$ de polinomios de grado$\leq$ 4 a coeficientes reales. Considere los siguientes subespacios vectoriales de $P_4(\mathbb{R})$, $W_1 = \{p \in P_4(\mathbb{R})/p$ tiene a 1 como raíz$\}$,$W_2 = \{p \in P_4(\mathbb{R})/p$ tiene a 2 como raíz$\}$
a)Encuentre bases de W_1 y de W_2 y dé las dimensiones respectivas.
b)Encuentre una base de $W_1 \cap W_2$ y de su dimensión.
c)Deduzca que $P_4(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$. ¿Es suma directa?

P4. Sea

$$M = \{M \in M_n(\mathbb{R})/M_{ij} = \begin{cases} a, & \text{si } i = j \\ b, & \text{si } i \neq j \end{cases} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}$$

a)Pruebe que M con la suma y ponderación por escalar usuales es s.e.v de $M_n(\mathbb{R})$
b)Dé una base de M.
c)Caracterizar los elementos de M que son invertibles para el producto de matrices.

P5. Se define la aplicación $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ por $f(A) = A + A^t$.
i)Verificar que f es lineal.
ii)Indicar núcleo, imagen de f y dimensiones de estos subespacios. ¿Es f inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

P6. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definida por $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = b_i c_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, donde $B \in R^m \backslash \{0\}$ y $C \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
Consideremos la función lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $L(x) = Ax$.
a)Calcule el rango de L y dé una base de $Im(L)$.
b)Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definamos $h_i = c_i e_1 - c_1 e_i \in \mathbb{R}^n$ para $2 \leq i \leq n$. Demuestre que $h_i \in Ker(L)$. Demuestre que $\{h_i\}_{i=2}^n$ es una base de $Ker(L)$.