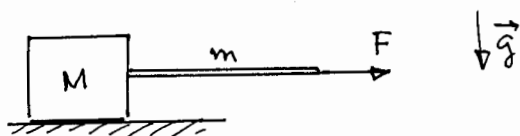


## Elementos que intervienen a menudo en aplicaciones de la segunda ley de Newton.

1. CUERDAS IDEALES : Se trata de elementos flexibles que sólo pueden ser sometidos a esfuerzos de tracción. Una cuerda ideal satisface dos condiciones : ser inextensible y de masa despreciable.

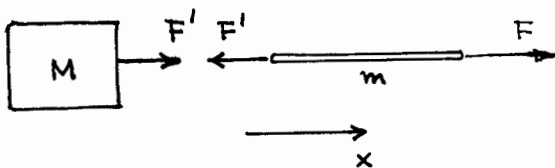
Consideremos el caso de un bloque de masa  $M$  tirado por una cuerda de masa  $m$  en cuyo extremo libre se aplica una fuerza horizontal  $F$ . El bloque se apoya sobre una superficie lisa ( $\mu=0$ ). Se trata de una cuerda no ideal.



Aplicando la segunda ley al conjunto :  $F = (M+m) a$  ,

luego, 
$$a = \frac{F}{M+m}$$

Si hacemos un análisis más detallado, tratándose de dos cuerpos, identifiquemos las fuerzas que intervienen sobre ambos solamente en la dirección del movimiento.



Ecuaciones de movimiento de ambos cuerpos :

Masa  $M$  :  $F' = M a$  (1)

Cuerda  $m$  :  $F - F' = m a$  (2)

La aceleración " $a$ " es la misma para el bloque y la cuerda debido a que esta última se supone inextensible y por lo tanto ambos tienen iguales desplazamientos.

Eliminando  $F'$  entre (1) y (2) se obtiene:

$$F - Ma = ma \rightarrow F = (M+m)a \rightarrow a = \frac{F}{M+m}$$

Además, se encuentra que  $F' = \frac{M}{M+m} F$ , es decir,  $F' < F$

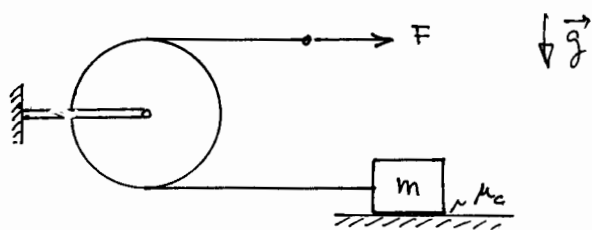
Si la cuerda es ideal,  $m = 0$  y  $F' = F$

lo que muestra que una cuerda ideal transmite la fuerza en toda su intensidad.

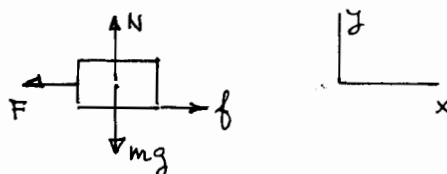
## 2. POLEAS IDEALES. Masa despreciable. Giran sin roce en el eje.

a) Poleas fijas.

Consideremos el caso de la figura:



Bloque: D.C.L



Se pregunta, por ejemplo, por el valor de  $F$  para que el bloque se desplace con velocidad constante. La polea transmite la fuerza  $F$  en toda su intensidad, cambiando únicamente su dirección, de modo que el D.C.L del bloque es el de la figura anexa.

Para los ejes  $x$  e  $y$  en las direcciones indicadas, las ecuaciones escalares de movimiento respectivas son:

$$x: -F + f = 0 \quad y: N - mg = 0$$

En la primera ecuación la aceleración  $a$  es nula para satisfacer la condición que el bloque debe moverse con velocidad constante.

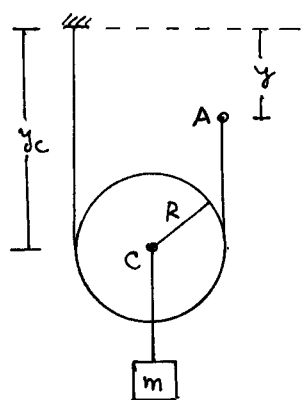
Además, como  $f = \mu_c N$  y  $N = mg$

se tiene que  $f = \mu_c mg$

con lo que finalmente el valor de  $F$  queda como:

$$F = \mu_c mg.$$

b) Polea móvil.



La cuerda ideal pasa por la garganta de la polea.

El contacto tiene una longitud  $\pi R$ . La longitud de la cuerda es  $l$ .

Al subir o bajar el extremo A de la cuerda, sube o baja el centro C de la polea y por ende, la masa  $m$  colgada de su centro.

De la figura, se desprende la siguiente relación entre sus elementos:

$$2y_c + \pi R = l + y \quad (*)$$

Al desplazar A en un  $\Delta y$ , el centro C se desplaza en un  $\Delta y_c$ , cumpliéndose una nueva relación, del mismo tipo de (\*), ésta es:

$$2(y_c + \Delta y_c) + \pi R = l + (y + \Delta y) \quad (**)$$

Restando (\*) de (\*\*):  $2\Delta y_c = \Delta y$

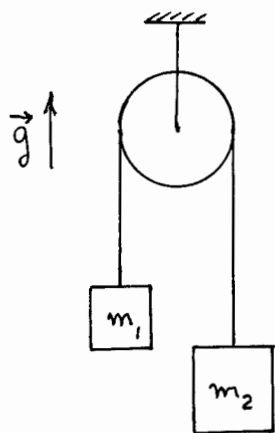
O sea,

$$\boxed{\Delta y_c = \frac{1}{2} \Delta y}$$

lo que indica que el desplazamiento del centro C es la mitad del desplazamiento del extremo A de la cuerda, algo que debemos tener en cuenta al escribir las aceleraciones en sistemas donde intervienen poleas móviles.

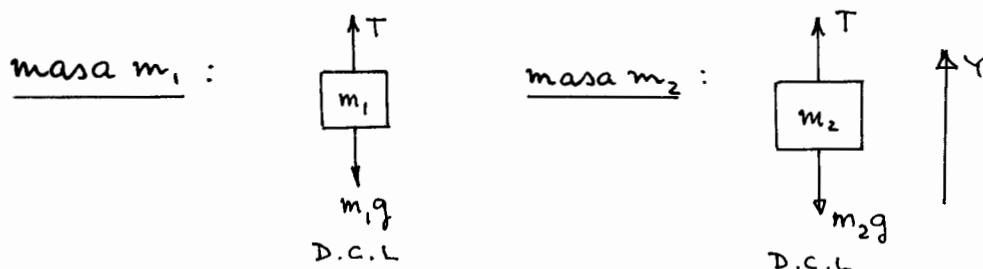
## Aplicaciones.

### 1. Máquina de Atwood.



Las masas  $m_1$  y  $m_2$ , unidas mediante una cuerda ideal montada sobre una polea fija, también ideal.

Determinar las aceleraciones de las masas y la tensión de la cuerda.



Para escribir las ecuaciones escalares de movimiento elijamos una dirección vertical con un sentido arbitrario como el indicado por el eje  $Y$  de la figura. En consecuencia, las ecuaciones correspondientes toman la forma:

$$\text{masa } m_1: \quad T - m_1 g = m_1 a_1 \quad (1)$$

$$\text{masa } m_2: \quad T - m_2 g = m_2 a_2 \quad (2)$$

Pero, si suponemos que  $m_1$  sube,  $m_2$  baja, es decir, tienen distinto sentido. Por lo tanto se cumple que

$$a_2 = -a_1 \quad (3)$$

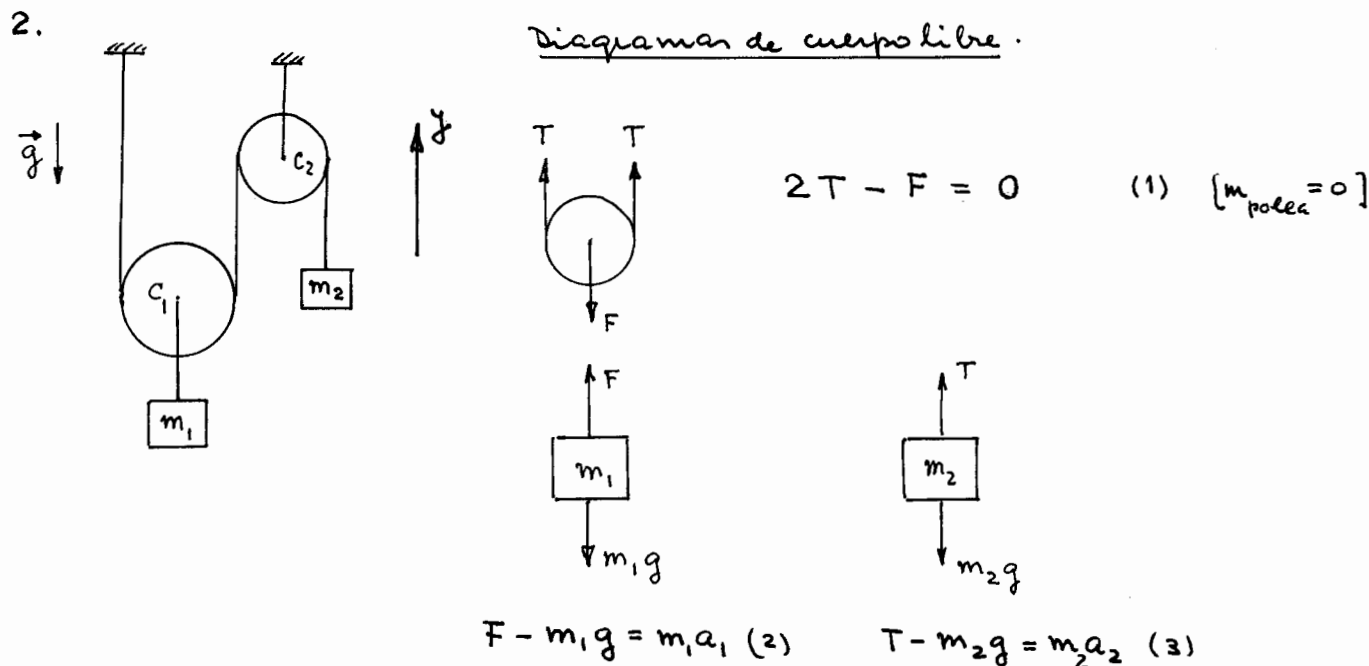
$$\therefore \quad T - m_2 g = -m_2 a_1 \quad (4)$$

De (1) y (4), eliminando  $T$ :

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

$$\text{Luego, reemplazando en (1):} \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

- Análisis: a) Si  $m_1 = m_2$ , entonces  $a_1 = a_2 = 0$ . y  $T = m_1 g = m_2 g$   
 b) Si  $m_1 > m_2$ ,  $a_1 < 0$  y  $m_1$  desciende y  $m_2$  sube  
 c) Si  $m_1 < m_2$ ,  $a_1 > 0$  y  $m_1$  sube;  $m_2$  desciende



De (1):  $F = 2T$ . Además,  $a_2 = -2a_1$  (son de signos contrarios)

Las ecuaciones (2) y (3) se pueden reescribir como:

$$2T - m_1 g = m_1 a_1 \quad (4)$$

$$\text{y} \quad T - m_2 g = -2m_2 a_1 \quad (5)$$

La solución de este sistema de ecuaciones nos conduce a los valores de  $a_1$  y  $T$ :

$$a_1 = \frac{2m_2 - m_1}{4m_2 + m_1} g \quad \text{y} \quad T = \frac{3m_1 m_2}{m_1 + 4m_2} g \quad ; \quad a_2 = -a_1$$

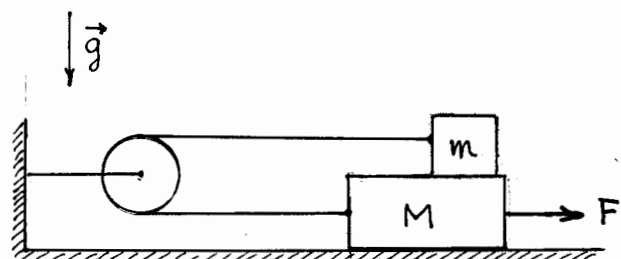
Ahora, si  $2m_2 = m_1$ , entonces  $a_1 = a_2 = 0$

si  $2m_2 > m_1$ , "  $a_1 > 0$ , es decir, tiene la dirección del eje  $y$  adoptado y por lo tanto  $m_1$  sube. Etc.

Nota: Para plantear las ecuaciones de movimiento se adoptó una direc\_

ción única de proyección, la del eje "y" indicado en la figura, criterio distinto al empleado en la solución del mismo problema mostrado en la clase, pero que será el que emplearemos a futuro, por razones de uniformidad.

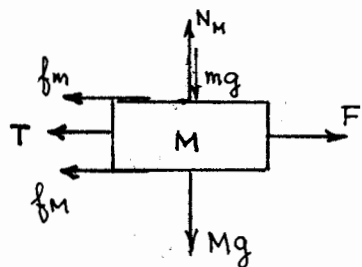
3.



El sistema de la figura muestra dos masas  $m$  y  $M$  unidas mediante una cuerda ideal que pasa por una polea ideal fija. El coeficiente de roce cinético es el mismo en los contactos entre  $m$  y  $M$  y entre  $M$  y la superficie horizontal fija: su valor es  $\mu_c$ .

Calcular las aceleraciones del sistema cuando se aplica al bloque  $M$  una fuerza horizontal  $F$ .

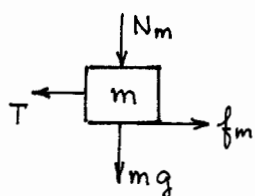
D.C.L. Masa  $M$ :



$$x: F - f_M - f_m - T = M a_M \quad (1)$$

$$y: N_M - Mg - mg = 0 \quad (2)$$

D.C.L. Masa  $m$ :



$$x: f_m - T = m a_m \quad (3)$$

$$y: N_m - mg = 0 \quad (4)$$

Siete incógnitas:  $T, f_m, f_M, N_m, N_M, a_m, a_M$ .

Las ecuaciones adicionales necesarias son  $f_M = \mu_c N_M$  (5) ;  $a_m = -a_M$  (7)  
y  $f_m = \mu_c N_m$  (6)

De (2),  $N_M = Mg + mg$  y  $N_m = mg$

luego,  $f_M = \mu_c (M+m)g$  (8)

y  $f_m = \mu_c mg$  (9)

Con estos valores, las ecuaciones (1) y (3) se transforman en :

$$F - \mu_c (M+m)g - \mu_c mg - T = M a_M \quad (10)$$

$$\mu_c mg - T = -m a_M \quad (11)$$

Tenemos ahora dos ecuaciones con dos incógnitas :  $a_M$  y  $T$ .

Restando la segunda de la primera :

$$F - \mu_c (M+m)g - \mu_c mg - \cancel{T} - \mu_c mg + \cancel{T} = M a_M + m a_M$$

$$\therefore F - \mu_c g (M+3m) = (M+m) a_M$$

$$\therefore \boxed{a_M = \frac{F - (M+3m)\mu_c g}{M+m}} \quad a_m = -a_M$$

La tensión  $T$  de la cuerda se obtiene de (11) .

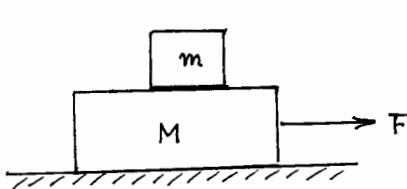
¿ Para qué valores de  $F$  el sistema no se mueve ?

No se mueve significa  $a_M = 0 = a_m$  . Por lo tanto, no hay movimiento

para  $F \leq (M+3m)\mu_c g$

4. El bloque de masa  $m$  se encuentra depositado sobre el bloque de masa  $M$ . El coeficiente de roce estático entre las caras en contacto es  $\mu_e$ .

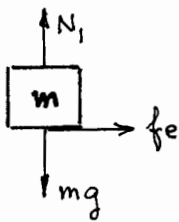
El conjunto se desplaza sobre una superficie horizontal lisa



debido a una fuerza horizontal  $F$  aplicada al bloque  $M$ .

Calcular el máximo valor que puede dársele a la fuerza  $F$  sin que el bloque  $m$  deslice respecto de  $M$ .

D.C.L. bloque  $m$ .



Ecuas. de movimiento:

$$f_e = m a_x \quad (1)$$

$$N - mg = 0 \quad (2)$$

El bloque  $m$  estará a punto de resbalar para el máximo valor que puede alcanzar la fuerza de roce estático  $f_e$ , esto es, para

$$f_e = \mu_e N_1 \quad (3)$$

lo que determina la máxima aceleración  $a_x$  del conjunto.

De (2),  $N = mg$ , con lo que se obtiene para  $f_e$  el valor:

$$f_e = \mu_e mg \quad (4)$$

y por consiguiente, de (1):

$$a_x = \mu_e g \quad (5)$$

Finalmente, la segunda ley aplicada al movimiento de ambos cuerpos en conjunto:

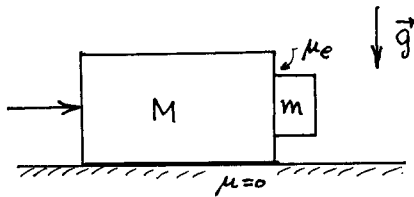
$$F = (M + m) a_x$$

lo que fija el valor de  $F$ :

$$F = (M + m) \mu_e g$$



5.



El bloque  $m$  está en contacto con la cara anterior del bloque  $M$ . El coeficiente de roce estático entre las caras de ambos cuerpos es  $\mu_e$ .

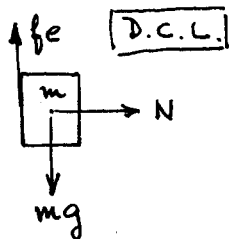
A su vez, el bloque  $M$  desliza sobre una superficie horizontal lisa empujado por una fuerza horizontal  $F$ .

Calcular el mínimo valor de  $F$  para que el bloque  $m$  no caiga.

Para el sistema como un todo se tiene:

$$F = (M+m)a \rightarrow a_x = \frac{F}{M+m} \quad (1)$$

Para el bloque  $m$  por separado:



$$x: N = m a_x \quad (2)$$

$$y: f_e - mg = 0 \quad (3) \quad \text{no debe deslizar, luego } a_y = 0$$

Pero  $f_e = \mu_e N$  : (bloque  $m$  a punto de deslizar.)

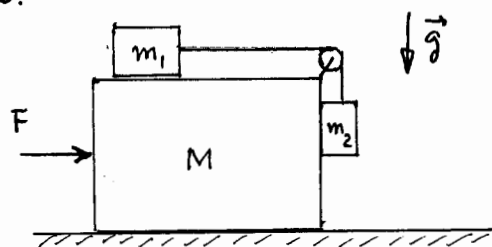
$$\therefore f_e = \mu_e m a_x \quad (4)$$

$$\text{De (3) y (4): } \cancel{m}g = \mu_e \cancel{m} a_x$$

Reemplazando  $a_x$  mediante (1) se obtiene para  $F$  el valor:

$$\boxed{F = \frac{M+m}{\mu_e} g} \quad (5)$$

6.



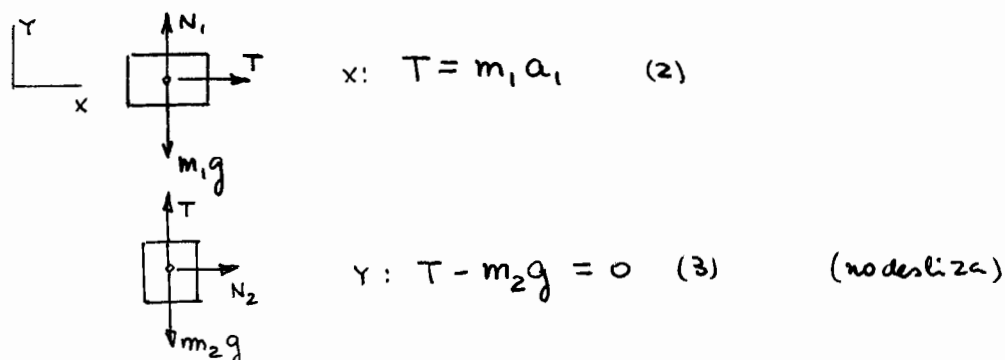
En el sistema de la figura, las masas  $m_1$  y  $m_2$  se encuentran ligadas por una cuerda ideal que pasa por una polea fija al bloque M. Todos los contactos son

lisos. Se trata entonces de calcular el valor de la fuerza F para que  $m_1$  y  $m_2$  no deslicen respecto de M.

La segunda ley para el sistema completo permite escribir :

$$F = (M + m_1 + m_2) a \quad (1)$$

En la dirección del movimiento, la única fuerza que actúa sobre el bloque  $m_1$  es la tensión de la cuerda. Analicemos su movimiento.



$$\text{De (2) y (3) : } m_1 a_1 - m_2 g = 0$$

$$\therefore a_1 = \frac{m_2}{m_1} g \quad (4)$$

Ahora, como se estipula que  $m_1$  no debe resbalar sobre M, sus aceleraciones deben ser iguales :  $a = a_1$ . Por lo tanto, reemplazando (4) en (1) :

$$F = \frac{(M + m_1 + m_2) m_2}{m_1} g \quad (5)$$

Si se desea conocer la tensión de la cuerda, basta reemplazar (4) en (2) :

$$T = m_2 g$$